

1. Φυλλάδιο ασκήσεων I

[Παράδοση μέχρι Δευτέρα 4 Μαρτίου 2013]

Άσκηση 1.1. Οι περιστροφές στο επίπεδο γίνονται από τον πίνακα

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(α) Θεωρήστε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και τα διανύσματα $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$. Βρείτε τα διανύσματα $\vec{i}' := A_\theta \vec{i}$ και $\vec{j}' := A_\theta \vec{j}$. Σχεδιάστε τα ζεύγη διανυσμάτων $\vec{i}, A_\theta \vec{i}$ και $\vec{j}, A_\theta \vec{j}$ για $\theta = \pi/4$.

(β) Βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{i}' \cdot \vec{j}$ και $\vec{i}' \cdot \vec{j}'$.

(γ) Βρείτε ότι $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$ και $A_\theta^{-1} = A_\theta^T$.

Άσκηση 1.2. Έστω ένα τρίγωνο στο επίπεδο με κορυφές P_1, P_2, P_3 .

(α) Έστω v_1, v_2, v_3 τα διανύσματα από τα σημεία P_1, P_2, P_3 σε σημείο στο επίπεδο P . Εκφράστε, χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο και τα τρία αυτά διανύσματα την συνθήκη ώστε το P να βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από την κορυφή P_1 και είναι κάθετη στην απέναντι πλευρά.

(β) Υποθέστε ότι το P βρίσκεται στην τομή των δύο ευθειών που περνούν από τα P_1 και P_2 και είναι κάθετα στις αντίστοιχες απέναντι πλευρές. Δείξτε ότι $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$.

(γ) Αν ισχύουν οι υποθέσεις των ερωτημάτων (α) και (β), δείξτε ότι το P βρίσκεται επίσης στην ευθεία που περνάει από το P_3 και είναι κάθετη στην απέναντι πλευρά.

Άσκηση 1.3. Ο νόμος του Kepler για την κίνηση ουρανίων σωμάτων λέει ότι η στροφορμή $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{v}$ είναι σταθερή (όπου $\vec{v} := d\vec{r}/dt$ και t είναι ο χρόνος). Δείξτε ότι η δύναμη \vec{F} που ασκείται στα σώματα είναι κεντρική (δηλαδή η \vec{F} έχει την ίδια διεύθυνση με το \vec{r}).

[Υπόδειξη: υπολογίστε την χρονική παράγωγο της στροφορμής.]

Άσκηση 1.4. Δείξτε ότι τα σημεία με διανύσματα θέσης

$$\vec{v}_1 = (1 \ 0 \ 1), \quad \vec{v}_2 = (1 \ 1 \ 0), \quad \vec{v}_3 = (1 \ -3 \ 4),$$

κείνται στην ίδια ευθεία. Δώστε την εξίσωση της ευθείας σε παραμετρική μορφή $[\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}]$.

Άσκηση 1.5. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{v}_1 = (1 \ 0 \ 1), \quad \vec{v}_2 = (1 \ 1 \ 0).$$

Βρείτε διάνυσμα το οποίο να είναι κάθετο στα \vec{v}_1 και \vec{v}_2 .

Άσκηση 1.6. Βρείτε την εξίσωση επιπέδου το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (1, 1, 1)$.