5. Επιφανειες

(Finney, Παρ. 10.4)

5.1. **Κύλινδροι.** Στην γεωμετρία η λέξη κύλινδρος χρησιμοποιείται συνήθως με μία στενή έννοια. Μπορούμε να την επεκτείνουμε και να δώσουμε έναν γενικότερο ορισμό.

Ορισμός 11. *Κύλινδρος* είναι η επιφάνεια που σχηματίζεται από όλες τις ευθείες οι οποίες (α) είναι παράλληλες σε δεδομένη ευθεία του χώρου και (β) διέρχονται από δεδομένη καμπύλη στο επίπεδο.

Παράδειγμα 5.1. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα z και η δεδομένη καμπύλη στο επίπεδο xy είναι κύκλος, τότε προκύπτει ο συνήθης κύλινδρος. □

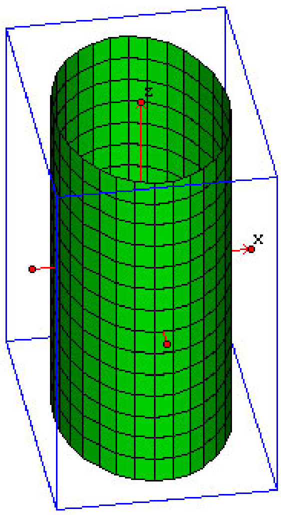
Παράδειγμα 5.2. Αν υποθέσουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα z και η δεδομένη καμπύλη στο επίπεδο xy είναι έλλειψη (π.χ., $x^2+2y^2=1$), τότε έχουμε τον *ελλειπτικό κύλινδρο.* □

Παράδειγμα 5.3. Αν υποθέσουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα z και η δεδομένη καμπύλη στο επίπεδο xy είναι παραβολή (π.χ., $y=x^2$), τότε έχουμε τον *παραβολικό κύλινδρο.*

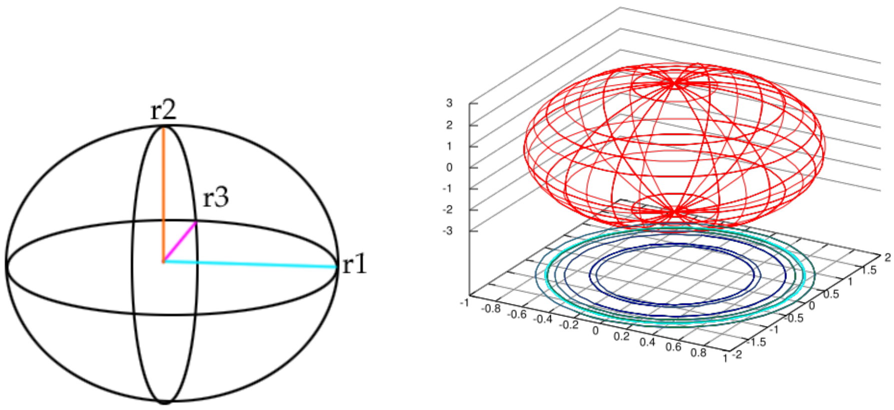
Η εξίσωση του κυλίνδρου είναι $y=x^2$. Αυτό συμβαίνει διότι:

(1) κάθε σημείο που ανήκει στον κύλινδρο: ανήκει σε ευθεία παράλληλη στον άξονα z που περνάει από σημείο της παραβολής, έστω (x_0, x_0^2) δηλαδή είναι της μορφής (x_0, x_0^2, z) (γιά κάθε z). Εύκολα βλέπουμε ότι τέτοια σημεία ικανοποιούν την εξίσωση.

(2) Αντιστρόφως, κάθε σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση $y_0 = x_0^2$ είναι της μορφής (x_0, x_0^2, z) και άρα ανήκει στον κύλινδρο. □



Σχημα 2. Ελλειπτικός κύλινδρος



Σχημα 3. Ελλειψοειδές

Παρατήρηση 5. *Η δεδομένη καμπύλη στην οποία τέμνει ο κύλινδρος το επίπεδο xy λέγεται γεννήτρια καμπύλη του κυλίνδρου.*

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι κάθε καμπύλη $g(x,z)=c$ στο επίπεδο xz είναι η γεννήτρια καμπύλη γιά έναν κύλινδρο παράλληλο στον άξονα y με εξίσωση $g(x,z)=c$. Επίσης κάθε καμπύλη $h(y,z)$ ορίζει έναν κύλινδρο παράλληλο στον άξονα x με εξίσωση $h(y,z)=c$.

Πάντως ο άξονας του κυλίνδρου δεν είναι απαραιτήτως παράλληλος με έναν άξονα συντεταγμένων.

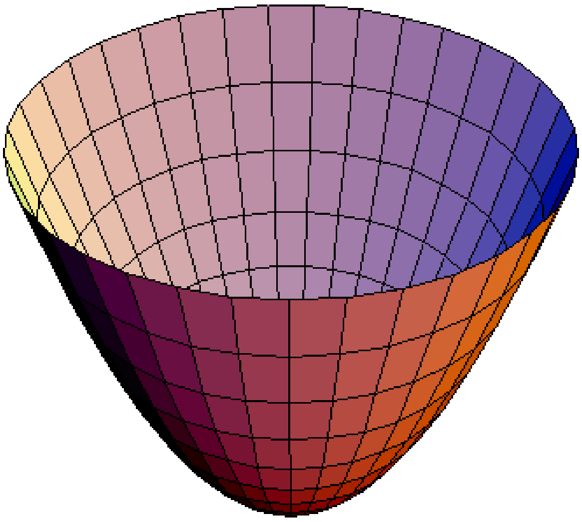
5.2. **Επιφάνειες δευτέρου βαθμού.** Ήδη γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις οι οποίες είναι γραμμικές ως προς $x, y.z$ δίνουν επίπεδα στον χώρο. Το επίπεδο είναι βέβαι μία ειδική περίπτωση επιφάνειας στον χώρο. Θα εξετάσουμε στα επόμενα επιφάνειες οι οποίες δίνονται από εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Παράδειγμα 5.4. (Σφαίρα) Γενικεύουμε την εξίσωση του κύκλου $x^2+y^2=a^2$ και γράφουμε στις τρεις διαστάσεις την εξίσωση

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Αυτή δίνει επιφάνεια, τα σημεία (x,y,z) της οποίας απέχουν απόσταση a από την αρχή των αξόνων. Η επιφάνεια είναι η σφαίρα ακτίνας a. Η σφαίρα τέμνει το επίπεδο xy (δηλ., το $z=0$) στην καμπύλη $x^2+y^2=a^2$ (κύκλος), την οποία βρίσκουμε θέτοντας $z=0$ στην εξίσωση της επιφάνειας. Ομοίως, η σφαίρα τέμνει το επίπεδο xz στον κύκλο $x^2+z^2=a^2$, κλπ. $\square$

Δεν είναι πάντα εύκολο να φανταστούμε τη μορφή επιφανειών στον χώρο. Είναι λοιπόν σύνηθες να θεωρούμε τομές των επιφανειών με επίπεδα (π.χ., όπως το επίπεδα $z=0$) οι οποίες μας δίνουν καμπύλες. Θεωρώντας τομές με διάφορα επίπεδα μπορούμε να φανταστούμε την μορφή της επιφάνειας.



Σχημα 4. Παραβολοειδές εκ περιστροφής

Παράδειγμα 5.5. (Ελλειψοειδές) Γενικεύοντας την εξίσωση της έλλειψης $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ γράφουμε στις τρεις διαστάσεις την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

- Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα xy, xz και yz είναι ελλείψεις με άξονες b, c και c, a και a, b αντίστοιχα. Αυτό το βλέπουμε θέτοντας αντίστοιχα $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.
- Το ελλειψοειδές τέμνει τους άξονες στα σημεία $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ και $(0, 0, \pm c)$.
- Όλα τα σημεία του ελλειψοειδούς ικανοποιούν τις ανισότητες $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$.
- Η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς καθένα από τα επίπεδα xy, xz και yz διότι όλες οι μεταβλητές είναι υψωμένες στο τετράγωνο.
- Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα $z = z_0$ $|(z_0| < c)$ είναι ελλείψεις:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z_0^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2(1-z_0^2/c^2)}+\frac{y^2}{b^2(1-z_0^2/c^2)}=1.\square$$

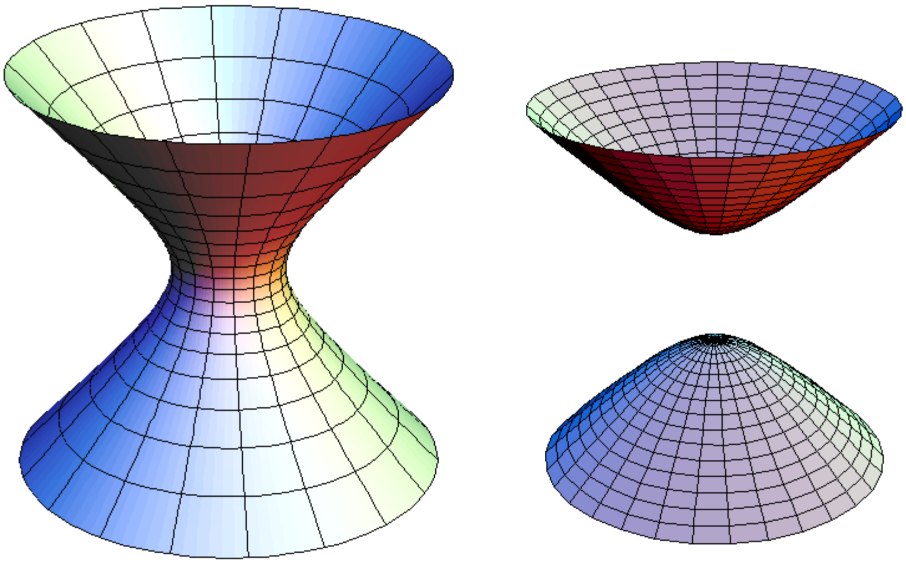
Παράδειγμα 5.6. (Παραβολοειδές) Η εξίσωση της παραβολής $z = x^2$ μπορεί να γενικευτεί στις τρεις διαστάσεις ως εξής:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}.$$

- Η επιφάνεια έχει σημεία μόνο γιά $z \ge 0$ (όταν $c > 0$).
- Τέμνει το επίπεδο xy (δηλ., το $z = 0$) μόνο στο σημείο $(0, 0, 0)$
- Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{είναι η παραβολή} \quad z = \frac{c}{b^2}y^2$$

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{είναι η παραβολή} \quad z = \frac{c}{a^2}x^2.$$



Σχημα 5. *(αριστερά)* Μονόχωνο υπερβολοειδές. *(δεξιά)* Δίχωνο υπερβολοειδές

- Η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο

$$z = z_0 > 0 \quad \to \quad \text{είναι ή έλλειψη} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0}{c}.$$

Αν $a = b$ τότε λέμε ότι έχουμε ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής (γύρω από τον άξονα z).
□

Παράδειγμα 5.7. (Μονόχωνο υπερβολοειδές)

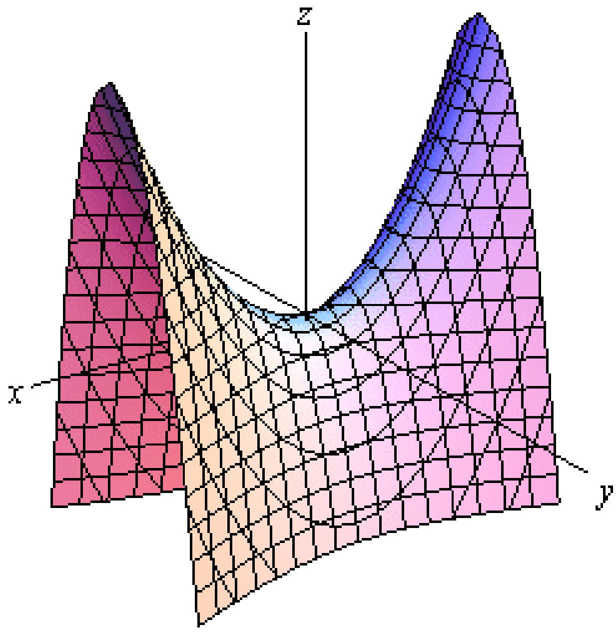
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα είναι

$$\begin{aligned} x = 0 &\quad \text{υπερβολή} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 &\quad \text{υπερβολή} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = z_0 &\quad \text{έλλειψη} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.8. (Δίχωνο υπερβολοειδές)

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Σχημα 6. Υπερβολικό παραβολοειδές

Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα είναι

$$\begin{aligned}
x = 0 \quad &\to \quad \text{υπερβολή} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
y = 0 \quad &\to \quad \text{υπερβολή} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{z^2} = 1 \\
z = z_0 \quad &\to \quad \text{έλλειψη} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} - 1, \quad \text{γιά } |z_0| > c.
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι η επιφάνεια χωρίζεται σε δύο μέρη, γι΄ αυτό ονομάζουμε το γράφημα δίχωνο υπερβολοειδές. □

Παράδειγμα 5.9. (Ελλειπτικός κώνος)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Τα υπερβολοειδή τείνουν ασυμπτωτικά προς τον ελλειπτικό κώνο (αυτομελέτη). □

Παράδειγμα 5.10. (Υπερβολικό παραβολοειδές)

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \qquad c > 0.$$

Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα είναι

$$
\begin{aligned}
x = 0 \quad &\rightarrow \quad \text{παραβολή} \quad z = \frac{c}{b^2}\, y^2 \\
y = 0 \quad &\rightarrow \quad \text{παραβολή} \quad z = -\frac{c}{a^2}\, x^2 \\
z = z_0 \quad &\rightarrow \quad \text{υπερβολή} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c}.
\end{aligned}
$$

Η επιφάνεια περνάει από την αρχή των αξόνων. Εάν κινούμαστε στο επίπεδο xz έχουμε ελάχιστο στην αρχή των αξόνων, ενώ αν κινούμαστε στο επίπεδο yz έχουμε μέγιστο στο ίδιο σημείο. Η επιφάνεια έχει σαγματικό σχήμα. □

5.3. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 5.1. Σχεδιάστε τις τομές με τα επίπεδα $z = z_0$ γιά ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής.