0.1. **Άσκηση.** (Φυλλάδιο ΙΙ, άσκηση 2.9) Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$h(x,y) = \frac{a(x+y)}{x^2+y^2+a^2},$$

όπου $a > 0$ είναι μία σταθερά. Σχεδιάστε ορισμένες ισοσταθμικές επιφάνειες στο επίπεδο (x,y).

Γιά να βρούμε τα κρίσιμα σημεία λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$h_x = 0, \qquad h_y = 0.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} h_x &= a\,\frac{-x^2+y^2+a^2-2xy}{(x^2+y^2+a^2)^2} \\ h_y &= a\,\frac{x^2-y^2+a^2-2xy}{(x^2+y^2+a^2)^2}. \end{aligned}$$

Ώστε έχουμε το σύστημα (αφού ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός)

$$\begin{aligned} -x^2+y^2+a^2-2xy &= 0 \\ x^2-y^2+a^2-2xy &= 0. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

$$2xy = a^2, \qquad x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x.$$

Γιά $y=-x$ η πρώτη εξίσωση δεν δίνει λύση. Για $y = x$ η πρώτη εξίσωση δίνει $x = \pm a/\sqrt{2}$. Άρα έχουμε δύο κρίσιμα σημεία

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

Γιά να δούμε αν είναι ακρότατα πρέπει να υπολογίσουμε τις δεύτερες παραγώγους

$$h_{xx} = a\,\frac{-2(x+y)(x^2+y^2+a^2) - 4x(-x^2+y^2+a^2-2xy)}{(x^2+y^2+a^2)^3}.$$

Αλλά στα κρίσιμα σημεία έχουμε $-x^2+y^2+a^2-2xy = 0$, οπότε

$$h_{xx}\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -a\,\frac{2(x+y)}{(x^2+y^2+a^2)^2}\Big|_{(\pm a/\sqrt{2}, \pm a/\sqrt{2})} = \mp a\,\frac{2\sqrt{2}a}{4a^4} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}a^2}.$$

Ομοίως

$$\begin{aligned} h_{yy}\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) &= a\,\frac{-2(x+y)(x^2+y^2+a^2) - 4x(-x^2+y^2+a^2-2xy)}{(x^2+y^2+a^2)^3}\Big|_{(\pm a/\sqrt{2}, \pm a/\sqrt{2})} \\ &= -a\,\frac{2(x+y)}{(x^2+y^2+a^2)^2}\Big|_{(\pm a/\sqrt{2}, \pm a/\sqrt{2})} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}a^2}. \end{aligned}$$

Επίσης,

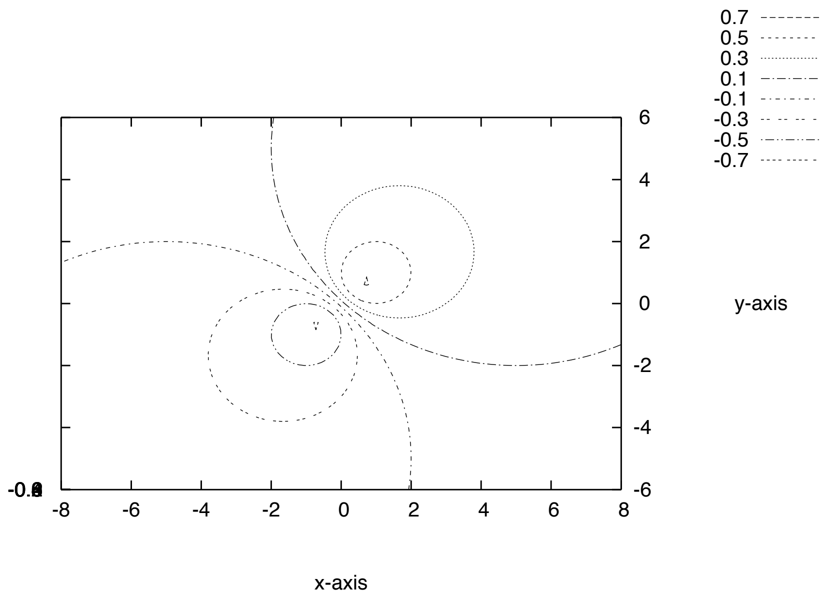
$$h_{xy}\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = a\,\frac{2(y-x)(x^2+y^2+a^2) - 4y(-x^2+y^2+a^2-2xy)}{(x^2+y^2+a^2)^3}\Big|_{(\pm a/\sqrt{2}, \pm a/\sqrt{2})} = 0.$$

Εφαρμόσουμε τα κριτήρια γιά τα κρίσιμα σημεία. Γιά το πρώτο σημείο $(a\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$ έχουμε

$$h_{xx} = -\frac{1}{\sqrt{2}a^2} < 0, \qquad h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 = \frac{1}{2a^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{μέγιστο.}$$

Γιά το δεύτερο σημείο $(-a\sqrt{2}, -a/\sqrt{2})$ έχουμε

$$h_{xx} = \frac{1}{\sqrt{2}a^2} > 0, \qquad h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 = \frac{1}{2a^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ελάχιστο.}$$



Σχημα 1. Ισοσταθμικές καμπύλες.