

Απειροστικός Λογισμός II (εαρινό εξάμηνο 2011)

2. Φυλλάδιο ασκήσεων II

2.1. **Άσκηση.** Έστω $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Δείξτε τις ακόλουθες σχέσεις

$$(i) \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \quad (ii) \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

2.2. **Άσκηση.** Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$ στο σημείο $(1, 2)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{v} = 3/5\mathbf{i} + 4/5\mathbf{j}$.

2.3. **Άσκηση.** Το βαρυτικό δυναμικό δίνεται από την

$$V = -\frac{GmM}{r},$$

όπου G, m, M είναι σταθερές και $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (σφαιρική συντεταγμένη). Βρείτε την βαρυτική δύναμη \mathbf{F} η οποία παράγεται από την κλίση αυτού του δυναμικού:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

όπου $\hat{\mathbf{r}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

2.4. **Άσκηση.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ στο σημείο $(0, 0)$.

2.5. **Άσκηση.** Έστω $f(x, y) = g(ax + by)$, όπου a, b είναι σταθερές και η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ναδειχθεί ότι

$$b \frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial f}{\partial y}.$$

2.6. **Άσκηση.** Να βρεθεί η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης $\partial^2 f/\partial u^2$ της σύνθετης συνάρτησης $f(u, v)$ που ορίζεται από τις ισότητες

$$f(u, v) = g(x, y) = x + y, \quad x = u^2 - v^2, \quad y = e^{uv}.$$

2.7. **Άσκηση.** Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\partial z/\partial x$ και $\partial^2 z/\partial x \partial y$ της πεπλεγμένης συνάρτησης $z(x, y)$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$e^z + x^2 y + z + 5 = 0.$$

2.8. **Άσκηση.** Να αναπτυχθεί με τον τύπο του Taylor μέχρι όρους δεύτερης τάξης η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

γύρω από το σημείο $(0, 0)$.

2.9. **Άσκηση.** Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$h(x, y) = \frac{a(x + y)}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad a : \text{σταθερά.}$$

2.10. **Άσκηση.** Σχεδιάστε με υπολογιστή ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες της προηγούμενης άσκησης στο επίπεδο (x, y) .