

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (εαρινό εξάμηνο 2011)

1. Φυλλάδιο ασκήσεων Ι

1.1. **Άσκηση.** Δείξτε ότι τα σημεία με διανύσματα θέσης

$$\mathbf{v}_1 = (1 \ 0 \ 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1 \ 1 \ 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1 \ -3 \ 4),$$

κείνται στην ίδια ευθεία. Δώστε την εξίσωση της ευθείας σε παραμετρική μορφή $[\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}]$.

1.2. **Άσκηση.** Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ δείξτε την τριγωνική ανισότητα

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|.$$

1.3. **Άσκηση.** Θεωρούμε το σημείο με συνάρτηση θέσης την $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ το οποίο διαγράφει μία καμπύλη (η οποία ονομάζεται κυκλοειδής καμπύλη). (α) Κάνετε γραφική παράσταση της καμπύλης. (β) Βρείτε το μήκος τόξου που αντιστοιχεί σε μία περιστροφή.

1.4. **Άσκηση.** Δίνεται η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\hat{\mathbf{i}} + (\sin t)\hat{\mathbf{j}} + t^2\hat{\mathbf{k}}$. (α) Δείξτε ότι το σημείο $P = (1, 0, 0)$ ανήκει στην καμπύλη, (β) βρείτε την παραμετρική έκφραση για της εφαπτομένη ευθεία στο σημείο P και (γ) βρείτε σημείο της εφαπτομένης ευθείας σε απόσταση μίας μονάδας από το P .

1.5. **Άσκηση.** Βρείτε το καρτεσιανό ισοδύναμο της ακόλουθης πολικής εξίσωσης

$$r = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta.$$

Προσδιορίστε το σχήμα της καμπύλης.

1.6. **Άσκηση.** Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα (\mathbf{T}) της καμπύλης $y = x^2 - 1$. Επίσης βρείτε την καμπυλότητα (κ) και την ακτίνα καμπυλότητας (ρ) στο ελάχιστο της καμπύλης $(x, y) = (0, -1)$.

1.7. **Άσκηση.** Σχεδιάστε ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες για την συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 - 9y^2.$$

1.8. **Άσκηση.** Δείξτε ότι η

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

δεν έχει όριο στο $(0, 0)$.

1.9. **Άσκηση.** Εξετάστε εάν η

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

έχει όριο στο σημείο $(0, 0)$, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες.

1.10. **Άσκηση.** Ορίστε την

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ώστε να είναι συνεχής στον \mathbf{R}^2 .