

**Απειροστικός Λογισμός II (εαρινό εξάμηνο 2009/2010)**

**4. Φυλλάδιο ασκήσεων IV  
(Γιά τις καλοκαιρινές διακοπές)**

4.1. **Άσκηση.** Να εξετασθεί αν υπάρχουν τα όρια

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$

4.2. **Άσκηση.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{για } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{για } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Να εξετασθεί αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$  στο σημείο  $(0, 0)$ .

4.3. **Άσκηση.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

Ναδειχθεί ότι

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

4.4. **Άσκηση.** Να βρεθεί η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης  $\partial^2 z / \partial x^2$  της πεπλεγμένης συνάρτησης  $z = \phi(x, y)$  που ορίζεται από την εξίσωση  $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$ .

4.5. **Άσκηση.** Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^4 - y^4.$$

Μπορείτε να τα χαρακτηρίσετε ως μέγιστα, ελάχιστα, ή σαγματικά σημεία;

4.6. **Άσκηση.** Ναδειχθεί ότι για κάθε παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  ισχύει

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{dr}{dt}, \quad \text{όπου } r = |\mathbf{r}|.$$

4.7. **Άσκηση.** Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 ye^x dy dx.$$

[Υπόδειξη: αλλάζτε πρώτα την σειρά ολοκλήρωσης.]

4.8. **Άσκηση.** Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int \int_D (x + y) dx dy$$

όπου  $D$  είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τις ευθείες  $x + y = 1$ ,  $x + y = 4$  και  $x - 2y = -2$ ,  $x - 2y = 1$ .