

## Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (εαρινό εξάμηνο 2009/2010)

### 3. Φυλλάδιο ασκήσεων ΙΙΙ

3.1. **Άσκηση.** Δίνεται η σχέση

$$yz - \ln z = x + y.$$

Δείξτε ότι δέχεται μοναδική λύση  $z = \phi(x, y)$  σε περιοχή του σημείου  $(x, y) = (0, 0)$ , τέτοια ώστε  $\phi(0, 0) = 1$ . Βρείτε τις μερικές παραγώγους  $\partial z/\partial x$ ,  $\partial z/\partial y$  καθώς και την  $\partial^2 z/\partial x^2$ .

3.2. **Άσκηση.** Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_D xy^2 dx dy,$$

όπου  $D$  είναι η κλειστή περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες  $y = 0$ ,  $y = x$  και το ημικύκλιο  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . (Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης.)

3.3. **Άσκηση.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα (με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης)

$$\int_0^3 \int_y^3 e^{x^2} dx dy.$$

(Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης.)

3.4. **Άσκηση.** Να υπολογισθεί το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 = 4y$ . (Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης.)

3.5. **Άσκηση.** Να υπολογισθεί με αλλαγή μεταβλητών το ολοκλήρωμα

$$I = \int_D \int 3xy dx dy$$

όπου  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες  $x - 2y = 0$ ,  $x - 2y = -4$ ,  $x + y = 4$ ,  $x + y = 1$ .

3.6. **Άσκηση.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του καρδιοειδούς χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$r = a(1 + \cos \theta).$$

3.7. **Άσκηση.** Να υπολογισθεί με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες το ολοκλήρωμα

$$\int_D \int (x^2 + y^2)^2 dx dy,$$

όπου  $D$  είναι ο δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ .

3.8. **Άσκηση.** Να υπολογισθεί με διπλή ολοκλήρωση ο όγκος του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3.9. **Άσκηση.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της  $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)/a^2}$  ολοκληρώνοντας σε όλον τον  $\mathbf{R}^3$ .