

Απειροστικός Λογισμός II (εαρινό εξάμηνο 2009/2010)

2. Φυλλάδιο ασκήσεων II

2.1. **Άσκηση.** Έστω $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Δείξτε τις ακόλουθες σχέσεις

$$(i) \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \quad (ii) \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

2.2. **Άσκηση.** Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$ στο σημείο $(1, 2)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{v} = 3/5\mathbf{i} + 4/5\mathbf{j}$.

2.3. **Άσκηση.** Το βαρυτικό δυναμικό δίνεται από την

$$V = -\frac{GmM}{r},$$

όπου G, m, M είναι σταθερές και $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Βρείτε την βαρυτική δύναμη \mathbf{F} η οποία παράγεται από την κλίση αυτού του δυναμικού:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

όπου $\hat{\mathbf{r}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

2.4. **Άσκηση.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ στο σημείο $(0, 0)$.

2.5. **Άσκηση.** Έστω συνάρτηση $f(x, y)$ και η αλλαγή μεταβλητών

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad v = -x \sin \theta + y \cos \theta,$$

όπου θ είναι μία σταθερά. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

[Αν x, y παριστάνουν τις καρτεσιανές συνεταγμένες σημείου, τότε u, v είναι οι νέες καρτεσιανές μετά από μία στροφή των αξόνων στον χώρο κατά σταθερή γωνία θ .]

2.6. **Άσκηση.** Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial v$ της σύνθετης συνάρτησης $f(u, v)$ που ορίζεται από τις ισότητες

$$f(x, y) = xe^{x/y}, \quad x = u^2 + v^2, y = uv.$$

2.7. **Άσκηση.** Να βρεθεί η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης $\partial^2 f/\partial u^2$ της σύνθετης συνάρτησης $f = f(u, v)$ που ορίζεται από τις ισότητες

$$f(x, y) = x + y, \quad x = u^2 - v^2, y = e^{uv}.$$

2.8. **Άσκηση.** Να αναπτυχθεί με τον τύπο του Taylor μέχρι όρους δεύτερης τάξης η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

γύρω από το σημείο $(0, 0)$.

2.9. **Άσκηση.** Βρείτε και χαρακτηρίστε (μέγιστο, ελάχιστο, σαγματικό σημείο) τα στάσιμα σημεία της

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1).$$