

Απειροστικός Λογισμός II (εαρινό εξάμηνο 2009/2010)

1. Φυλλάδιο ασκήσεων I

1.1. **Άσκηση.** Υπολογίστε τα εξωτερικά γινόμενα

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i}.$$

1.2. **Άσκηση.** Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ και δείξτε ότι

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = 0.$$

1.3. **Άσκηση.** Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ δείξτε την τριγωνική ανισότητα

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|.$$

[Δείτε βιβλίο Marsden, Tromba, σελ. 44.]

1.4. **Άσκηση.** Θεωρήστε τις παραμετρικές εκφράσεις καμπυλών

$$(\alpha) \mathbf{r}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\sin 4t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$(\beta) \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} - t\mathbf{k}, \quad -2\pi \leq t \leq 0.$$

Βρείτε το μήκος καμπύλης που προκύπτει για κάθε μία από τις δύο εκφράσεις.

1.5. **Άσκηση.** Δίνεται η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} - t\mathbf{k}$. (α) Δείξτε ότι το σημείο $P = (1, 0, 0)$ ανήκει στην καμπύλη, (β) βρείτε την παραμετρική έκφραση για την εφαπτομένη ευθεία στο σημείο P και (γ) βρείτε σημείο της εφαπτομένης ευθείας σε απόσταση μίας μονάδας από το P .

1.6. **Άσκηση.** Βρείτε το καρτεσιανό ισοδύναμο της ακόλουθης πολικής εξίσωσης

$$r = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta.$$

Προσδιορίστε το σχήμα της καμπύλης.

1.7. **Άσκηση.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

η οποία ορίζεται στο $\mathbf{R}^2 - (0, 0)$. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)], \quad (\beta) \lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)], \quad (\gamma) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y).$$

1.8. **Άσκηση.** Δείξτε ότι η

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

δεν έχει όριο στο $(0, 0)$.

1.9. **Άσκηση.** Ορίστε την

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ώστε να είναι συνεχής στο \mathbf{R}^2 .