

Απειροστικός Λογισμός II [TEM132]

Εξετάσεις, 27 Αυγούστου 2010 [διάρκεια: 2:30 ώρες]

Όνομα:

ΑΜ:

Θέμα 1:

2:

3:

4:

5:

6:

0.1. **Θέμα.** (10 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Να εξεταστεί εάν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$  στο σημείο  $(0, 0)$ .

0.2. **Θέμα.** (15 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών  $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$ . Βρείτε την παράγωγο της στο σημείο  $(0, -1)$  κατά την κατεύθυνση  $\mathbf{v} = (3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{j}$ .

0.3. **Θέμα.** (10 μονάδες) Έστω η διανυσματική συνάρτηση (καμπύλη)

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 3t)\hat{\mathbf{i}} + (\sin 3t)\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{7}t\hat{\mathbf{k}}.$$

Βρείτε το μήκος της καμπύλης για  $0 \leq t \leq 4\pi$ .

0.4. **Θέμα.** (25=10+10+5 μονάδες) Η συνάρτηση  $g(t)$  ορίζεται ως

$$g(t) = f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy,$$

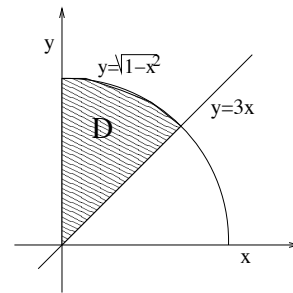
όπου  $x(t) = 4t$  και  $y(t) = 2t^2$ . (i) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας και βρείτε για ποιές τιμές του  $t$  η  $g(t)$  έχει ακρότατα. (ii) Σε ποιά σημεία  $(x, y)$  αντιστοιχούν τα προηγούμενα ακρότατα; Είναι κάποια από αυτά ακρότατα και της συνάρτησης  $f(x, y)$ ; (iii) Εάν κάποια είναι ακρότατα της  $f$ , είναι μέγιστα, ελάχιστα, ή σαγματικά σημεία;

0.5. **Θέμα.** (20 μονάδες)

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D x^2 y \, dx dy$$

όπου  $D$  είναι η κλειστή περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες  $x = 0$ ,  $y = 3x$  και το ημικύκλιο  $y = \sqrt{1 - x^2}$  (όπως στο σχήμα).



0.6. **Θέμα.** (25=15+10 μονάδες) Δίνεται το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα:

$$\iint_D xy \, dx dy$$

όπου  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από το παραλληλόγραμμο με πλευρές τις ευθείες

$$x + y = 0, \quad x + y = 2, \quad x - 2y = 0, \quad x - 2y = 1.$$

Χρησιμοποιήστε τις μεταβλητές  $u = x + y$ ,  $v = x - 2y$ , (i) γράψτε το ολοκλήρωμα στις νέες μεταβλητές και (ii) υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος.

## Απειροστικός Λογισμός ΙΙ [TEM132]

Εξετάσεις, 27 Αυγούστου 2010 [διάρκεια: 2:30 ώρες]

Όνομα:

ΑΜ:

Θέμα 1:

2:

3:

4:

5:

6:

0.1. **Θέμα.** (10 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Να εξεταστεί εάν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$  στο σημείο  $(0, 0)$ .0.2. **Θέμα.** (15 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών  $f(x, y) = e^y \sin(\pi x)$ . Βρείτε την παράγωγο της στο σημείο  $(1, 0)$  κατά την κατεύθυνση  $\mathbf{v} = (4/5)\mathbf{i} + (3/5)\mathbf{j}$ .0.3. **Θέμα.** (10 μονάδες) Έστω η διανυσματική συνάρτηση (καμπύλη)

$$\mathbf{r}(t) = (\sin 4t)\hat{\mathbf{i}} - (\cos 4t)\hat{\mathbf{j}} + 3t\hat{\mathbf{k}}.$$

Βρείτε το μήκος της καμπύλης για  $0 \leq t \leq 2\pi$ .0.4. **Θέμα.** (25=10+10+5 μονάδες) Η συνάρτηση  $g(t)$  ορίζεται ως

$$g(t) = f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy,$$

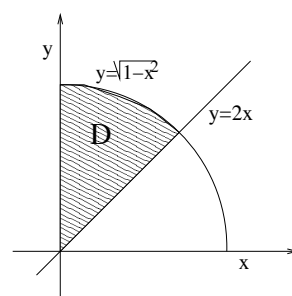
όπου  $x(t) = t^2$  και  $y(t) = 2t$ . (i) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας και βρείτε για ποιές τιμές του  $t$  η  $g(t)$  έχει ακρότατα. (ii) Σε ποιά σημεία  $(x, y)$  αντιστοιχούν τα προηγούμενα ακρότατα; Είναι κάποια από αυτά ακρότατα και της συνάρτησης  $f(x, y)$ ; (iii) Εάν κάποια είναι ακρότατα της  $f$ , είναι μέγιστα, ελάχιστα, ή σαγματικά σημεία;

0.5. **Θέμα.** (20 μονάδες)

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D x^2 y \, dx dy$$

όπου  $D$  είναι η κλειστή περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες  $x = 0$ ,  $y = 2x$  και το ημικύκλιο  $y = \sqrt{1 - x^2}$  (όπως στο σχήμα).

0.6. **Θέμα.** (25=15+10 μονάδες) Δίνεται το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα:

$$\iint_D xy \, dx dy$$

όπου  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από το παραλληλόγραμμο με πλευρές τις ευθείες

$$x - y = 0, \quad x - y = 2, \quad x + 2y = 0, \quad x + 2y = 1.$$

Χρησιμοποιήστε τις μεταβλητές  $u = x - y$ ,  $v = x + 2y$ , (i) γράψτε το ολοκλήρωμα στις νέες μεταβλητές και (ii) υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος.