

Απειροστικός Λογισμός II [EM132]
Εξετάσεις, 10η Ιουνίου 2010 [διάρκεια: 2 ώρες]

Όνομα:	ΑΜ:				
Θέμα 1:	2:	3:	4:	5:	6:

Θέμα 1 (20=5+15 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2$$

της οποίας το γράφημα είναι η επιφάνεια $S: z = f(x, y)$. (i) Σχεδιάστε με ευκρίνεια ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες στο επίπεδο (x, y) . Πώς ονομάζονται (χαρακτηρίζονται) οι καμπύλες που σχεδιάσατε; Έχει η S σημεία για $z \geq 0$, για $z \leq 0$, ή και τα δύο; (ii) Βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο $(\sqrt{2}, 1, 0)$.

Θέμα 2 (15 μονάδες) Δίνεται η παραμετρική έκφραση καμπύλης

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\hat{\mathbf{i}} + (\sin t)\hat{\mathbf{j}} + t^2\hat{\mathbf{k}}.$$

Δείξτε ότι το σημείο $(0, 1, \pi^2/4)$ ανήκει στην καμπύλη και βρείτε την παραμετρική έκφραση της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο.

Θέμα 3 (10 μονάδες) Έστω η πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}^2 - \{0, 0\}$, όπου

$$f(x, y) = \frac{x^4 + x^2y^2 + xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο της $f(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$.

Θέμα 4 (15 μονάδες) Να βρεθεί η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης $\partial^2 f / \partial u^2$ της σύνθετης συνάρτησης $f = f(u, v)$ που ορίζεται από τις ισότητες

$$f(u, v) = g(x, y) = x^2 + y, \quad x = u^2 - v^2, \quad y = e^{uv}.$$

Θέμα 5 (15=5+10 μονάδες) Δίνεται η σχέση

$$x^2y^2 - 3y^2z^2 + 2xz + 3x - 2y + 2z = 3.$$

(i) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση δέχεται μοναδική λύση $z = \phi(x, y)$ σε μία περιοχή του σημείου $(x, y) = (1, 1)$, τέτοια ώστε $\phi(1, 1) = 1$. (ii) Να υπολογισθεί η μερική παράγωγος $\partial z / \partial x$.

Θέμα 6 (25=5+10+10 μονάδες) Δίνεται το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^8 \int_{x/2}^4 \frac{y}{\sqrt{100 - y^3}} dy dx.$$

(i) Σχεδιάστε το πεδίο ολοκλήρωσης, (ii) αλλάξτε την σειρά ολοκλήρωσης και (iii) υπολογίστε το ολοκλήρωμα.