1. Εφαρμογες διπλων και τριπλων ολοκληρωματων

1.1. **Μέσες τιμές.** Έστω n αριθμοί $x_1, \dots, x_n$, ο *μέσος όρος* τους ορίζεται ως

$$< x >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Κατ΄ αναλογία ορίζουμε την μέση τιμή συνάρτησης στο διάστημα $[a, b]$:

$$< f >= \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Γιά συναρτήσεις δύο μεταβλητών έχουμε

$$< f >= \frac{\int\int_D f(x,y)dxdy}{\int\int_D dxdy}.$$

Αν έχουμε μάζες $m_1, \dots, m_n$ στα σημεία $x_1, \dots, x_n$ λέμε ότι το *κέντρο μάζας* είναι το

$$< x >= \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε μία συνεχή πυκνότητα μάζας $\rho(x)$, π.χ., έναν πλανήτη, τότε το κέντρο μάζας του είναι

$$< x >= \frac{\int x\rho(x)dx}{\int \rho(x)dx}.$$

Γιά συνεχή πυκνότητα μάζας $\rho(x, y)$ στο επίπεδο το κέντρο μάζας είναι στο σημείο με συντεταγμένες

$$< x >= \frac{\int x\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}, \quad < y >= \frac{\int y\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}.$$

Γιά συνεχή πυκνότητα μάζας $\rho(x, y, z)$ στον χώρο το κέντρο μάζας του είναι

$$< x >= \frac{\int x\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}, \quad < y >= \frac{\int y\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}, \quad < z >= \frac{\int z\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}.$$

1.1.1. *Άσκηση.* Να βρεθεί το κέντρο μάζας του ομογενούς χωρίου

$$D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

[Θεωρήστε πυκνότητα μάζας ρ_0: σταθ.]

Το χωρίο είναι το τέταρτο κυκλικού δίσκου με ακτίνα a.

Υπολογίζουμε το εμβαδό του χωρίου

$$E(D) = \int\int_D dxdy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx = \ldots = \frac{\pi}{4}a^2.$$

Επίσης

$$\int\int_D xdxdy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xdydx = \ldots = \frac{1}{3}a^2.$$

$$\int\int_D y dx dy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy dx = \ldots = \frac{1}{3}a^2.$$

Το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο $(< x >, < y >)$ όπου

$$< x > = \frac{\int\int_D x\rho_0 \, dxdy}{\int\int_D \rho_0 \, dxdy} = \frac{\int\int_D xdxdy}{E(D)} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$< y > = \frac{\int\int_D y\rho_0 \, dxdy}{\int\int_D \rho_0 \, dxdy} = \frac{\int\int_D ydxdy}{E(D)} = \frac{4a}{3\pi}.\square$$

1.2. **Χημικό δυναμικό ενός κβαντικού αερίου.** Αέρια που προέρχονται από ατμούς αλκαλικών μετάλων (π.χ., Li, Na, K, Rb, Cs) μπορούν να ψυχθούν σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες ($T \sim 1$nK) αφού πρώτα παγιδευτούν με laser και άλλες μεθόδους σε μαγνητικές παγίδες. Τα μαγνητικά δυναμικά μπορεί να είναι κυλινδρικά συμμετρικά της μορφής

$$V = \frac{1}{2}(\rho^2 + \beta^2 z^2),$$

όπου (ρ, ϕ, z) είναι κυλινδρικές συντεταγμένες και β είναι σταθερά που δείχνει πόσο επιμηκυσμένη προς την z διεύθυνση είναι η παγίδα.

Από την κβαντική φυσική ξέρουμε ότι (σε προσέγγιση) η πυκνότητα των ατόμων του αερίου δίνεται από την

$$n(\rho, z) = \begin{cases} [\mu - V(\rho, z)]/g, & V(\rho, z) \leq \mu \\ 0, & V(\rho, z) > \mu, \end{cases}$$

όπου μ είναι μία σταθερά την οποία εισάγει σε αυτό το σημείο η θεωρία. Το μ λέγεται *χημικό δυναμικό* και δίνει ένα μέτρο της μέσης ενέργειας των ατόμων. Το g είναι μία επιπλέον σταθερά την οποία θα θεωρήσουμε $g = 1$ στην συνέχεια. Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία το πλήθος των ατόμων N είναι ίσο με το ολοκλήρωμα

$$N = \int n \, dV$$

όπου η ολοκλήρωση εκτείνεται σε όλο τον χώρο. Εάν είναι γνωστός ο αριθμός των ατόμων N το ερώτημα που τίθεται είναι να υπολογίσουμε το χημικό δυναμικό μ γιά ένα τέτοιο σύστημα.

Θα υπολογίσουμε πρώτα τον αριθμό των ατόμων N σαν συνάρτηση των παραμέτρων:

$$N = \int\int\int \left[\mu - \frac{1}{2}(\rho^2 + \beta^2 z^2)\right] \rho d\phi d\rho dz.$$

Έχουμε $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ενώ το ϕ δεν εμφανίζεται στην ολοκληρωταία ποσότητα ούτε στα όρια ολοκλήρωσης (όπως θα δούμε και παρακάτω). Άρα

$$N = 2\pi \int\int \left[\mu - \frac{1}{2}(\rho^2 + \beta^2 z^2)\right] \rho d\rho dz.$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\zeta = \beta z$, ώστε

$$N = \frac{\pi}{\beta} \int\int \left[2\mu - (\rho^2 + \zeta^2)\right] \rho d\rho d\zeta.$$

Το χωρίο ολοκλήρωσης (όπου $n \neq 0$) στο επίπεδο (ρ, ζ) περιγράφεται ως

$$\mu - \frac{1}{2}(\rho^2 + \zeta^2) \geq 0 \Rightarrow \rho^2 + \zeta^2 \geq 2\mu,$$

δηλαδή είναι κύκλος. Γιά τα όρια ολοκλήρωσης παρατηρούμε ότι γιά $-\sqrt{2\mu} \leq \zeta \leq \sqrt{2\mu}$, ενώ γιά τυχόν ζ έχουμε $0 \leq \rho \leq \sqrt{2\mu - \zeta^2}$ (θυμηθείτε ότι $\rho \geq 0$ στις κυλινδρικές συντεταγμένες). Άρα έχουμε

$$N = \frac{\pi}{\beta} \int_{-\sqrt{2\mu}}^{\sqrt{2\mu}} \int_0^{\sqrt{2\mu - \zeta^2}} \left[2\mu - (\rho^2 + \zeta^2)\right] \rho d\rho \, d\zeta.$$

Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η ολοκληρωταία ποσότητα είναι άρτια ως προς ζ και έχουμε τελικά

$$N = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} \int_0^{\sqrt{2\mu - \zeta^2}} \left[2\mu - (\rho^2 + \zeta^2)\right] \rho d\rho \, d\zeta.$$

Ορίζουμε τώρα $\eta = \rho^2$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\pi}{\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} \int_{\eta=0}^{2\mu - \zeta^2} [2\mu - \eta - \zeta^2] \, d\eta \, d\zeta \\
&= \frac{\pi}{\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} \left[2\mu\eta - \frac{\eta^2}{2} - \zeta^2 \eta\right]_{\eta=0}^{2\mu-\zeta^2} d\zeta = \frac{\pi}{\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} (2\mu - \zeta^2) \left[2\mu - \frac{2\mu - \zeta^2}{2} - \zeta^2\right] d\zeta \\
&= \frac{\pi}{2\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} (2\mu - \zeta^2)^2 \, d\zeta = \frac{\pi}{2\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} (4\mu^2 - 4\mu\zeta^2 + \zeta^4) \, d\zeta = \frac{\pi}{2\beta} \left[4\mu^2 \zeta - 4\mu \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2\mu}} \\
&= \frac{\pi}{2\beta} \sqrt{2\mu} \, \mu^2 \left[4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{5}\right] = \frac{\pi}{\beta} \sqrt{2\mu} \, \mu^2 \, \frac{16}{15} = \frac{4\pi}{15\beta} (2\mu)^{5/2}.
\end{aligned}$$

Θεωρώντας τώρα ότι τα β και N είναι γνωστά, λύνουμε την παραπάνω ως προς μ και βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$(2\mu)^{5/2} = \frac{15\beta N}{4\pi} \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \left(\frac{15\beta N}{4\pi}\right)^{5/2}.$$