

**Απειροστικός Λογισμός II**  
**Φυλλάδιο ασκήσεων III**  
Παράδοση μέχρι Δευτέρα 11/5, 9πμ

**Άσκηση 1.** (1 μονάδα) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_D xy^2 dx dy,$$

όπου  $D$  είναι η κλειστή περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες  $y = 0$ ,  $y = x$  και το ημικύκλιο  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

**Άσκηση 2.** (1 μονάδα) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα (με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης)

$$\int_0^3 \int_y^3 e^{x^2} dx dy.$$

(Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης.)

**Άσκηση 3.** (1 μονάδα) Να υπολογισθεί το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 = 4y$ . (Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης.)

**Άσκηση 4.** (2 μονάδες) Να υπολογισθεί με αλλαγή μεταβλητών το ολοκλήρωμα

$$I = \int_D \int 3xy dx dy$$

όπου  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες  $x - 2y = 0$ ,  $x - 2y = -4$ ,  $x + y = 4$ ,  $x + y = 1$ .

**Άσκηση 5** (1 μονάδα) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_D \int e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$$

με την βοήθεια του μετασχηματισμού  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , όπου  $D$  είναι η περιοχή που περικλείεται από τους ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  και τις ευθείες  $x + y = 1$ ,  $x + y = 2$ .

**Άσκηση 6.** (1 μονάδα) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του καρδιοειδούς χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$r = a(1 + \cos \theta).$$

**Άσκηση 7.** (1 μονάδα) Να υπολογισθεί με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες το ολοκλήρωμα

$$\int_D \int (x^2 + y^2)^2 dx dy,$$

όπου  $D$  είναι ο δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Άσκηση 8.** (2 μονάδες) Να υπολογισθεί με διπλή ολοκλήρωση ο όγκος του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Άσκηση 9.** (2 μονάδες) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της  $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)/a^2}$  ολοκληρώνοντας σε όλον τον  $\mathbf{R}^3$ .

**Άσκηση 10.** (3 μονάδες) Βρείτε αριθμητικά (π.χ., με το matlab) ένα από τα διπλά ολοκληρώματα που ζητούνται στις παραπάνω ασκήσεις. Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα που ήδη βρήκατε από την ολοκλήρωση.

---

### Σημειώσεις

- Αρκεί να συμπληρώσετε 10 μονάδες για να πάρετε άριστα σε αυτό το φυλλάδιο.
  - Για τις ασκήσεις που χρειάζονται υπολογιστή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όποια γλώσσα προγραμματισμού ή όποιο πακέτο προτιμάτε.
-