

Απειροστικός Λογισμός II
Φυλλάδιο ασκήσεων II

Άσκηση 1. (1 μονάδα) Έστω $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Δείξτε τις ακόλουθες σχέσεις

$$(i) \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$$

$$(ii) \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

Άσκηση 2. (1 μονάδα) Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$ στο σημείο $(1, 2)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{v} = 3/5\mathbf{i} + 4/5\mathbf{j}$.

Άσκηση 3. (1 μονάδα) Το βαρυτικό δυναμικό δίνεται από την

$$V = -\frac{GmM}{r},$$

όπου G, m, M είναι σταθερές και $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (σφαιρική συντεταγμένη). Βρείτε την βαρυτική δύναμη \mathbf{F} η οποία παράγεται από την κλίση αυτού του δυναμικού:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

όπου $\hat{\mathbf{r}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Άσκηση 4. (1 μονάδα) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ στο σημείο $(0, 0)$.

Άσκηση 5. (2 μονάδες) Έστω μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f(x, y): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ και η αντικατάσταση μεταβλητών

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Γράφουμε την σύνθεση συναρτήσεων $h(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ [δηλαδή, γράφουμε την συνάρτηση σε πολικές συντεταγμένες].

(α) Βρείτε τις μερικές παραγώγους της h ως προς r και θ .

(β) Εκφράστε το αποτέλεσμα σαν συνάρτηση μόνο των x, y .

(γ) Λύστε τις εξισώσεις του ερωτήματος (α) και εκφράστε τις f_x, f_y συναρτήσεις των h_r, h_θ .

(δ) Δείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2.$$

Άσκηση 6. (1 μονάδα) Έστω συνάρτηση $f(x, y)$ και η αλλαγή μεταβλητών

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad v = -x \sin \theta + y \cos \theta,$$

όπου θ είναι μία σταθερά. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

[Αν x, y παριστάνουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου, τότε u, v είναι οι νέες καρτεσιανές μετά από μία στροφή των αξόνων στον χώρο κατά σταθερή γωνία θ .]

Άσκηση 7. (1 μονάδα) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial v$ της σύνθετης συνάρτησης $f = f(u, v)$ που ορίζεται από τις ισότητες

$$f(x, y) = xe^{x/y}, \quad x = u^2 + v^2, y = uv.$$

Άσκηση 8. (1 μονάδα) Να βρεθεί η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης $\partial^2 f/\partial u^2$ της σύνθετης συνάρτησης $f = f(u, v)$ που ορίζεται από τις ισότητες

$$f(x, y) = x + y, \quad x = u^2 - v^2, y = e^{uv}.$$

Άσκηση 9. (2 μονάδες) Να βρεθεί η μερική παράγωγος $\partial^2 z/\partial x \partial y$ της πεπλεγμένης συναρτήσεως $z(x, y)$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$e^z + x^2 y + z + 5 = 0.$$

Άσκηση 10. (1 μονάδα) Να αναπτυχθεί με τον τύπο του Taylor μέχρι όρους δεύτερης τάξης η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

γύρω από το σημείο $(0, 0)$.

Άσκηση 11. (1 μονάδα) Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$h(x, y) = \frac{a(x + y)}{x^2 + y^2 + a^2},$$

όπου a είναι μία σταθερά. Σχεδιάστε ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες στο επίπεδο (x, y) .

Άσκηση 12. (1 μονάδα) Σχεδιάστε με υπολογιστή ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες της προηγούμενης άσκησης στο επίπεδο (x, y) .

Σημειώσεις

- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με μία ή δύο μονάδες. Άρα, αρκεί να συμπληρώσετε 10 μονάδες για να πάρετε άριστα σε αυτό το φυλλάδιο.
 - Για τις ασκήσεις που χρειάζονται υπολογιστή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όποια γλώσσα προγραμματισμού ή όποιο πακέτο προτιμάτε.
-