Απειροστικός Λογισμός II
Φυλλάδιο ασκήσεων I

Άσκηση 1α. Δείξτε ότι τα σημεία με διανύσματα θέσης

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

κείνται στην ίδια ευθεία. Δώστε την εξίσωση της ευθείας σε παραμετρική μορφή ($\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$).
Άσκηση 1β. Βρείτε τα a, b έτσι ώστε τα διανύσματα

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{pmatrix},$$

να είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Άσκηση 2. Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq ||\boldsymbol{x}||\ ||\boldsymbol{y}||$$

όπου $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ είναι διανύσματα στον $\boldsymbol{R}^n$.
[Θέστε $a = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}$ και $b = -\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ και ξεκινήστε από την $(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y})^2 \geq 0$.]

Άσκηση 3. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}||$ δείξτε την τριγωνική ανισότητα

$$||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}||.$$

Άσκηση 4. Αποδείξτε τις ταυτότητες

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

Άσκηση 5. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης και
(α) δείξτε ότι $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ μόνο αν $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{v} = 0$,
(β) δείξτε την ταυτότητα $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = 0$.

Άσκηση 6. Σχεδιάστε ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες για την συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 - 9y^2.$$

Άσκηση 7. Δείξτε ότι η

$$f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$$

δεν έχει όριο στο $(0, 0)$.

Άσκηση 8. Εξετάστε εάν η

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

έχει όριο στο σημείο $(0,0)$ χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι
(α) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$.
(β) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin x \sin y} = 1$.
[Θεωρήστε γνωστό ότι $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$.]

Άσκηση 10. Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5 + 4x^2y^3 - 2y^5}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Άσκηση 11. Ορίστε την

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2}\right)$$

ώστε να είναι συνεχής στο $\boldsymbol{R}^2$.

Άσκηση 12. Ορίστε την

$$f(x,y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

ώστε να είναι συνεχής στο $\boldsymbol{R}^2$.

Άσκηση 13. Σχεδιάστε στον υπολογιστή ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες για μία από τις συναρτήσεις των προηγουμένων ασκήσεων γιά τις οποίες το όριο υπάρχει.

Άσκηση 14. Σχεδιάστε ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες για μία από τις συναρτήσεις των προηγουμένων ασκήσεων γιά τις οποίες το όριο δεν υπάρχει.

Σημειώσεις

- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με έναν βαθμό. Άρα, αρκεί να είναι σωστές 10 από τις 14 ασκήσεις γιά να πάρετε άριστα σε αυτό το φυλλάδιο.
- Γιά τις ασκήσεις που χρειάζονται υπολογιστή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όποια γλώσσα προγραμματισμού ή όποιο πακέτο προτιμάτε.
