

Απειροστικός Λογισμός II [EM132]

Εξετάσεις, 18η Σεπτεμβρίου 2009

Θέμα 1 (30 μονάδες = 10+10+10 μονάδες)

(α) Έστω $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ τρία μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους διανύσματα. Βρείτε το εξωτερικό γινόμενο

$$(\hat{i} + \hat{j}) \times (\hat{j} + \hat{k})$$

και δείξτε ότι είναι κάθετο στα διανύσματα $\hat{i} + \hat{j}$ και $\hat{j} + \hat{k}$.

(β) Έστω η πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}^2 - \{0, 0\}$, όπου

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο της $f(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$.

(γ) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (ειδικότερα, στο σημείο $(0, 0)$).

Θέμα 2 (30 μονάδες = 10+10+10 μονάδες)

(α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Να εξεταστεί εάν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ στο σημείο $(0, 0)$.

(β) Να υπολογισθεί με τον κανόνα της αλυσίδας η παράγωγος df/dt της σύνθετης συνάρτησης που ορίζεται από τις

$$f(x, y) = xy e^{xy}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Επίσης, βρείτε την τιμή της df/dt για $t = \pi/4$.

(γ) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$ της πεπλεγμένης συνάρτησης $z = f(x, y)$ η οποία ορίζεται από την εξίσωση

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1.$$

Θέμα 3 (40 μονάδες = 20+20 μονάδες)

(α) Δίνεται το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^6 \int_{y/2}^3 e^{x^2} dx dy.$$

(i) Σχεδιάστε το πεδίο ολοκλήρωσης, (ii) αλλάξτε την σειρά ολοκλήρωσης και (iii) υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

(β) Δίνεται το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int \int_D 3xy dx dy$$

όπου D είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τις ευθείες

$$x + y = 1, \quad x + y = 4, \quad x - 2y = 0, \quad x - 2y = -4.$$

(i) Σχεδιάστε το πεδίο ολοκλήρωσης, (ii) κάνετε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών και (iii) υπολογίστε το ολοκλήρωμα.