

## Απειροστικός Λογισμός II [EM132]

Εξετάσεις, 3η Ιουνίου 2009

**Θέμα 1** (35 μονάδες = 10+10+15 μονάδες)

(α) Δίνεται ότι ισχύει η ταυτότητα  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ . Αποδείξτε ότι ισχύει η

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}.$$

(β) Έστω η πραγματική συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbf{R}^2 - \{0, 0\}$ , όπου

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο της  $f(x, y)$  στο σημείο  $(0, 0)$ .

(γ) Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Να εξετάσετε εάν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (ειδικότερα, στο σημείο  $(0, 0)$ ).

**Θέμα 2** (30 μονάδες = 10+10+10 μονάδες)

(α) Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Να εξεταστεί εάν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$  στο σημείο  $(0, 0)$ .

(β) Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια  $S$  η οποία δίνεται από την

$$z = x^2 y^2 + y + 1,$$

στο σημείο  $(0, 0, 1)$ .

(γ) Αν  $h = f(ax + by)$  είναι τυχούσα παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε ναδειχθεί ότι

$$b \frac{\partial h}{\partial x} = a \frac{\partial h}{\partial y}.$$

**Θέμα 3** (45 μονάδες = 15+15+15 μονάδες)

(α) Αλλάξτε την σειρά ολοκλήρωσης στο ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα (σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης)

$$J = \int_0^1 \int_{2\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy dx.$$

(β) Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα (σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης)

$$I = \int_0^2 \int_0^{y^2/4} \frac{\sqrt{4 - y^2}}{y} dx dy.$$

(γ) Να υπολογισθεί με αλλαγή μεταβλητών το διπλό ολοκλήρωμα (σχεδιάστε χωρίο ολοκλήρωσης)

$$\int \int_D (x + y)^2 dx dy$$

όπου  $D$  είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τις ευθείες

$$x + y = 1, \quad x + y = 4, \quad x - 2y = -2, \quad x - 2y = 1.$$