4. Φυλλαδιο Ασκησεων IV

συντομες λυσεις, ενδεικτικες απαντησεις πολλαπλης επιλογης

4.1. **Άσκηση.** Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Gauss-Jordan γιά να βρείτε τους αντιστρόφους των παρακάτω πινάκων, αν υπάρχουν.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ενδεικτικές απαντήσεις πολλαπλής επιλογής:
(α) υπάρχει και έχει $(C^{-1})_{12} = 5/6$ (β) υπάρχει και έχει $(C^{-1})_{12} = 2/3$ (γ) είναι μη ιδιόμορφος (δ) δεν υπάρχει αντίστροφος

$$[C\ I] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 5/3 & 4/3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/6 & 4/6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

άρα ο αντίστροφος του C είναι ο

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 5/6 & 4/6 & -2 \\ 1/3 & 2/3 & -1 \\ -1/6 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Γιά τον D ας ξεκινήσουμε με απαλοιφή Gauss:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε ότι ο πίνακας D είναι ιδιόμορφος (αφού δεν έχει πλήρες σύστημα οδηγών), άρα είναι μη αντιστρέψιμος.

4.2. **Άσκηση.** Επιλέξτε έναν άνω τριγωνικό πίνακα και δείξτε με τη διαδικασία Gauss-Jordan ότι ο αντίστροφός του (αν υπάρχει) είναι άνω τριγωνικός.

Επιλέξτε, π.χ, το ακόλουθο απλό παράδειγμα:

$$[A\ I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I\ A^{-1}].$$

Κάνοντας τα ενδιάμεσα βήματα μπορείτε να πειστείτε ότι στον πίνακα που σχηματίζεται από τις τρείς τελευταίες στήλες τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο παραμένουν ίσα με μηδέν καθ᾽ όλη τη διαδικασία (και ότι αυτό συμβαίνει γιά κάθε άνω τριγωνικό πίνακα A).

4.3. **Άσκηση.** Βρείτε τον ανάστροφο των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εξηγήστε γιατί γιά τον πίνακα μετάθεσης ισχύει $P^{-1} = P^T$.

Ενδεικτικές απαντήσεις πολλαπλής επιλογής (π.χ., γιά τον πίνακα A):
(α) έχουμε $(A^T)_{23} = 1$ (β) έχουμε $(A^T)_{12} = 5$ (γ) ισχύει $A^T = A$ (δ) δεν υπάρχει ανάστροφος

Η απάντηση είναι άμεση χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αναστρόφου:

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{12}, \quad P^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις.
(α) Ο P_{12} είναι πίνακας εναλλαγής (των γραμμών 1 και 2). Η μορφή του είναι τέτοια ώστε $P_{12}^T = P_{12}$. Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε $P_{12}^2 = I$, άρα $P_{12}^{-1} = P_{12}$.
Γενικά ισχύει $P_{ij}^T = P_{ij} = P_{ij}^{-1}$.
(β) Ο P είναι πίνακας μετάθεσης διότι γράφεται ως

$$P = P_{13}P_{12}.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} P^T &= (P_{13}P_{12})^T = P_{12}^T P_{13}^T = P_{12}P_{13} \\ P^{-1} &= (P_{13}P_{12})^{-1} = P_{12}^{-1}P_{13}^{-1} = P_{12}P_{13} \end{aligned}$$

άρα $P^T = P^{-1}$.

4.4. **Άσκηση.** Βρείτε την παραγοντοποίηση LU σε κάτω τριγωνικό πίνακα και πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, γιά τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $Ax = 0$. Βρείτε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος.

Απαλοιφή Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to (\lambda_{31} = 1) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = U.$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ισχύει $A = LU$.
Έστω (u, v, w, z) οι μεταβλητές του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$. Οι βασικές μεταβλητές αντιστοιχούν σε οδηγούς και είναι οι u, v, w. Ελεύθερη μεταβλητή είναι η z.
Γιά τη γενική λύση παίρνουμε την $Ux = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Θέτουμε την ελεύθερη μεταβλητή $z = 1$ και το σύστημα δίνει (με ανάδρομη αντικατάσταση) $w = 1$, $v = -1$, $u = 1$. Λύση είναι το διάνυσμα $(u, v, w, z) = (1, -1, 1, 1)$ και τα πολλαπλάσιά του, δηλ., η γενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.5. **Άσκηση.** Εφαρμόστε απαλοιφή στον επαυξημένο πίνακα $[A : b]$ γιά να βρείτε τον κλιμακωτό πίνακα U και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες του b γιά να έχει λύση το σύστημα $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$ και τη γενική λύση της $Ax = b$ όταν $b = (4, 3, 5)$.

Ενδεικτικές απαντήσεις πολλαπλής επιλογής:
(α) το $Ax = b$ έχει λύση υπό τη συνθήκη $b_3 + b_2 - 2b_1 = 0$. (β) η $Ax = 0$ έχει λύση την $(4, -1, 0, 0)$ (γ) η $Ax = b$ έχει λύση την $(b_1, b_2 - b_1, b_3 + b_2 - 2b_1)$ (δ) η $Ax = b$ δεν έχει λύση

$$[A : b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & b_2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & b_3 \end{bmatrix} \to \ldots \to [A : b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Η συνθήκη γιά να έχει λύση η μη ομογενής είναι $b_3 + b_2 - 2b_1 = 0$.

Οι λύσεις της ομογενούς είναι

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Η $b = (4, 3, 5)$ ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη και άρα η μη ομογενής έχει λύση. Βρίσκουμε μία ειδική λύση $(u, v, w, z) = (4, -1, 0, 0)$ και έχουμε την γενική λύση της μη ομογενούς

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4.6. **Άσκηση.** Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $(2, 2, 1, 0)$ και $(3, 1, 0, 1)$.

Ενδεικτικές απαντήσεις πολλαπλής επιλογής.

$$(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\beta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\gamma) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(δ) δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας

Πρέπει να έχουμε δύο ελεύθερες μεταβλητές (π.χ., τις δύο τελευταίες) και δύο βασικές μεταβλητές (π.χ., τις δύο πρώτες).
Ας επιλέξουμε έναν απλό πίνακα, π.χ., της μορφής

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

γιά τον οποίο μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι έχει τον δεδομένο μηδενοχώρο.

4.7. **Άσκηση.** (α) Εξετάστε αν τα ακόλουθα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(β) Ομοίως γιά τα διανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 23 \\ -40 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 54 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ενδεικτικές απαντήσεις πολλαπλής επιλογής (π.χ., γιά το ερώτημα (α)).
(α) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα είναι μη ιδιόμορφος)
(β) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (είναι τρία διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$)
(γ) είναι γραμμικώς εξαρτημένα (είναι τρία διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$)
(δ) είναι γραμμικώς εξαρτημένα (το τρίτο είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων)

(α) Εξετάζουμε τον πίνακα με στήλες τα διανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 13 \\ -4 & -10 & -2 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε ότι είναι μη ιδιόμορφος και άρα τα τρία διανύσματα είναι γρ. ανεξάρτητα.
(β) Πέντε διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

4.8. **Άσκηση.** Έστω w_1, w_2, w_3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Δείξτε ότι τα διανύσματα $u_1 = w_2 - w_3$, $u_2 = w_3 - w_1$, $u_3 = w_1 - w_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Βρείτε έναν γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3 που δίνει μηδέν.

Δείτε το γραμμικό συνδυασμό

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

που δείχνει ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γρ. εξαρτημένα.

4.9. **Άσκηση.** Έστω w_1, w_2, w_3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Δείξτε ότι τα διανύσματα $v_1 = w_2 + w_3$, $v_2 = w_3 + w_1$, $v_3 = w_1 + w_2$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα. [Εκφράστε την σχέση $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ ως προς τα w_i και βρείτε εξισώσεις γιά τα c_i.]

Ενδεικτικές απαντήσεις πολλαπλής επιλογής.
(α) τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού η σχέση $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ δίνει σύστημα με μοναδική λύση $c_1, c_2, c_3 = 0$
(β) τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού η σχέση $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ δίνει ομογενές σύστημα
(γ) τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γρ. ανεξάρτητων w_1, w_2, w_3
(δ) τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού $v_1 + v_2 + v_3 = 2(w_1 + w_2 + w_3)$

Παίρνουμε γραμμικό συνδυασμό των v_1, v_2, v_3 και τον θέτουμε ίσο με το μηδενικό διάνυσμα:

$$\begin{aligned} c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0 \Leftrightarrow & c_1(w_2 + w_3) + c_2(w_3 + w_1) + c_3(w_1 + w_2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (c_2 + c_3)w_1 + (c_1 + c_3)w_2 + (c_1 + c_2)w_3 = 0. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι αυτό συμβαίνει μόνο αν οι συντελεστές c_1, c_2, c_3 είναι όλοι μηδέν.

Τα w_1, w_2, w_3 είναι γρ. ανεξάρτητα, άρα στην τελευταία σχέση οι συντελεστές είναι μηδέν και αυτό γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow c_1, c_2, c_3 = 0.$$

Ώστε τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

4.10. **Άσκηση.** Βρείτε μία βάση γιά το επίπεδο $x - 2y + 3z = 0$ στον $\mathbb{R}^3$. Στή συνέχεια βρείτε μία βάση γιά την τομή αυτού του επιπέδου με το $(x, y)-$επίπεδο. Τέλος βρείτε μία βάση γιά τον υπόχωρο των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο αρχικό επίπεδο.

Ενδεικτικές απαντήσεις πολλαπλής επιλογής (π.χ., γιά το ερώτημα (α)).
(α) Τα διανύσματα $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (-3, 0, 1)$ αποτελούν βάση γιά το επίπεδο
(β) Τα διανύσματα $v_1 = (2, 1, 1)$, $v_2 = (-3, 0, 1)$ αποτελούν βάση γιά το επίπεδο
(γ) Τα διανύσματα $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (-3, 0, 1), v_3 = (2, 1, 1)$ αποτελούν βάση γιά το επίπεδο
(δ) Το διάνυσμα $v_1 = (2, 1, 0)$ αποτελεί βάση γιά το επίπεδο

Η εξίσωση του επιπέδου $x - 2y + 3z = 0$ γράφεται ισοδύναμα ως ομογενής εξίσωση με πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

όπου έχουμε μία βασική μεταβλητή (x) και δύο ελεύθερες μεταβλητές (y, z). Η γενική λύση της ομογενούς (με την γενική γιά αυτές τις περιπτώσεις μέθοδο) είναι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Τα διανύσματα $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (-3, 0, 1)$ αποτελούν βάση γιά το επίπεδο.
Η τομή του επιπέδου με το (x, y)-επίπεδο $(z = 0)$ δίνεται από το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου έχουμε δύο βασικές μεταβλητές (x, z) και μία ελεύθερη μεταβλητή (y). Οι γενική λύση είναι $(x, y, z) = \alpha(2, 1, 0)$. Μία βάση γιά τον υπόχωρο είναι το διάνυσμα $u_1 = (2, 1, 0)$.
Κάθετα στο επίπεδο είναι τα διανύσματα της μορφής $\alpha(v_1 \times v_2)$. Άρα έχουμε τον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα

$$v_3 = v_1 \times v_2 = (1, -2, 3).$$

Το v_3 αποτελεί βάση αυτού του υποχώρου.

4.11. **Άσκηση.** (α) Δείξτε ότι το σύνολο V των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^4$ των οποίων οι δύο τελευταίες συντεταγμένες είναι ίσες είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$. (β) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του V.

(α) Κάθε γρ. συνδυασμός διανυσμάτων με ίσες τις δύο τελευταίες συντεταγμένες δίνει διάνυσμα με ίσες τις δύο τελευταίες συντεταγμένες. Άρα το υποσύνολο V του $\mathbb{R}^4$ είναι κλειστό ως προς πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με αριθμό, ώστε είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.
(β) Κάθε διάνυσμα του V είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Τα τρία διανύσματα στο δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι γρ. ανεξάρτητα, άρα $\dim V = 3$.

4.12. **Άσκηση.** (α) Να λυθεί, με τη μέθοδο της απολοιφής Gauss, το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 4y - z + 3w &= 2 \\ -x - 2y + z - 4w &= 3 \\ 2x + 2y - 2z + 13w &= 1. \end{aligned}$$

(β) Βρείτε τον χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$, τον χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ και τον μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & 13 \end{bmatrix}.$$

(α) Απολοιφή Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 13 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -6 & 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

$$\begin{aligned} &4w = 12 \Rightarrow w = 3 \\ &2y - w = 5 \Rightarrow y = (5 + w)/2 = 4 \\ &x + 4y - z + 3w = 2 \Rightarrow x = 2 - 4y + z - 3w = z - 23. \end{aligned}$$

Μία ειδική λύση βρίσκεται αν θέσουμε την ελεύθερη μεταβλητή $z = 0$ και είναι η $x_1 = (-23, 4, 0, 3)$.
Η λύση της ομογενούς είναι $w = 0$, $y = 0$, $x = z$, άρα $x_0 = z(1, 0, 1, 0)$.

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$x = x_1 + x_0 = \begin{bmatrix} -23 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

όπου z παίρνει οποιαδήποτε τιμή.

(β) Οι λύσεις του ομογενούς συστήματος παράγουν τον μηδενοχώρο:

$$\mathcal{N}(A) = \{z\,(1,0,1,0) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Μία βάση του χώρου γραμμών αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα:

$$\mathcal{R}(A^T) = \{\lambda_1\,(1,4,-1,3) + \lambda_2\,(0,2,0,-1) + \lambda_3\,(0,0,0,4) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$$

Οι στήλες του κλιμακωτού πίνακα που περιέχουν οδηγούς είναι οι 1η, 2η, 4η. Οι αντίστοιχες στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες και αποτελούν βάση του υποχώρου στηλών:

$$\mathcal{R}(A) = \{\lambda_1\,(1,-1,2) + \lambda_2\,(4,-2,2) + \lambda_3\,(3,-4,13) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$$

4.13. **Άσκηση.** Βρείτε τη διάσταση και μία βάση γιά τους τέσσερεις θεμελιώδεις υποχώρους των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ενδεικτικές απαντήσεις πολλαπλής επιλογής (γιά το ερώτημα της διάστασης).

(α) Ισχύουν $\dim\mathcal{N}(A) = 2, \quad \dim\mathcal{R}(A^T) = 2$

(β) Ισχύουν $\dim\mathcal{N}(A) = 1, \quad \dim\mathcal{R}(A^T) = 1$

(γ) Ισχύουν $\dim\mathcal{R}(A) = 2, \quad \dim\mathcal{R}(A^T) = 1$

(δ) Ισχύουν $\dim\mathcal{N}(A) = 2, \quad \dim\mathcal{N}(U) = 1$

Απαλοιφή Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Έχουμε δύο βασικές και δύο ελεύθερες μεταβλητές.

Ο *μηδενοχώρος* είναι κοινός γιά τους A, U:

$$\dim\mathcal{N}(A) = 2 = \dim\mathcal{N}(U)$$

με βάση τα διανύσματα $\{(2,-1,1,0), (-1,0,0,1)\}$.

Μία βάση του *χώρου γραμμών* (γιά τον A και τον U) αποτελείται από τις δύο μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα U. Άρα

$$\dim\mathcal{R}(A^T) = 2 = \dim\mathcal{R}(U^T)$$

και μία βάση είναι τα διανύσματα $\{(1,2,0,1),(0,1,1,0)\}$.

Οι στήλες του κλιμακωτού πίνακα που περιέχουν οδηγούς είναι δύο, οι 1η και 2η. Άρα, γιά τον *χώρο στηλών* έχουμε

$$\dim\mathcal{R}(A) = 2 = \dim\mathcal{R}(U).$$

Μία βάση γιά τον $\mathcal{R}(U)$ είναι τα διανύσματα $\{(1,0,0),(2,1,0)\}$.
Μία βάση γιά τον $\mathcal{R}(A)$ είναι τα διανύσματα $\{(1,0,1),(2,1,2)\}$.

Γιά τον *αριστερό μηδενοχώρο* έχουμε

$$\dim\mathcal{N}(A^T) = 1 = \dim\mathcal{N}(U^T).$$