ΕΜ111 - Γραμμική Άλγεβρα (χειμερινό εξάμηνο 2011)

4. Φυλλάδιο ασκήσεων IV

4.1. **Άσκηση.** Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Gauss-Jordan γιά να βρείτε τους αντιστρόφους των παρακάτω πινάκων, αν υπάρχουν.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2. **Άσκηση.** Επιλέξτε έναν άνω τριγωνικό πίνακα και δείξτε με την διαδικασία Gauss-Jordan ότι ο αντίστροφός του (αν υπάρχει) είναι άνω τριγωνικός.

4.3. **Άσκηση.** Βρείτε τον ανάστροφο των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εξηγήστε γιατί γιά τον πίνακα μετάθεσης ισχύει $P^{-1} = P^T$.

4.4. **Άσκηση.** Βρείτε την παραγοντοποίηση LU σε κάτω τριγωνικό πίνακα και πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, γιά τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $Ax = 0$. Βρείτε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος.

4.5. **Άσκηση.** Εφαρμόστε απαλοιφή στον επαυξημένο πίνακα $[A : b]$ γιά να βρείτε τον κλιμακωτό πίνακα U και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες του b γιά να έχει λύση το σύστημα $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$ και τη γενική λύση της $Ax = b$ όταν $b = (4, 3, 5)$.

4.6. **Άσκηση.** Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $(2, 2, 1, 0)$ και $(3, 1, 0, 1)$.

4.7. **Άσκηση.** (α) Εξετάστε αν τα ακόλουθα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(β) Ομοίως γιά τα διανύσματα: $\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 23 \\ -40 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 54 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$

4.8. **Άσκηση.** Έστω w_1, w_2, w_3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Δείξτε ότι τα διανύσματα $u_1 = w_2 - w_3$, $u_2 = w_3 - w_1$, $u_3 = w_1 - w_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Βρείτε έναν γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3 που δίνει μηδέν.

4.9. **Άσκηση.** Έστω w_1, w_2, w_3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Δείξτε ότι τα διανύσματα $v_1 = w_2 + w_3$, $v_2 = w_3 + w_1$, $v_3 = w_1 + w_2$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα. [Εκφράστε τη σχέση $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ ως προς τα w_i και βρείτε εξισώσεις γιά τα c_i.]

4.10. **Άσκηση.** Βρείτε μία βάση γιά το επίπεδο $x - 2y + 3z = 0$ στον $\mathbb{R}^3$. Στή συνέχεια βρείτε μία βάση γιά την τομή αυτού του επιπέδου με το $(x, y)-$επίπεδο. Τέλος βρείτε μία βάση γιά τον υπόχωρο των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο αρχικό επίπεδο.

4.11. **Άσκηση.** (α) Δείξτε ότι το σύνολο V των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^4$ των οποίων οι δύο τελευταίες συντεταγμένες είναι ίσες είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$. (β) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του V.

4.12. **Άσκηση.** (α) Να λυθεί, με τη μέθοδο της απολοιφής Gauss, το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 4y - z + 3w &= 2 \\ -x - 2y + z - 4w &= 3 \\ 2x + 2y - 2z + 13w &= 1. \end{aligned}$$

(β) Βρείτε τον χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$, τον χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ και τον μηδενοχώρο $\mathcal{N}(A)$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & 13 \end{bmatrix}.$$

4.13. **Άσκηση.** Βρείτε τη διάσταση και μία βάση γιά τους τέσσερεις θεμελιώδεις υποχώρους των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$