EM111 - Γραμμική Άλγεβρα (χειμερινό εξάμηνο 2011)

3. Φυλλάδιο ασκήσεων III

3.1. **Άσκηση.** Περιγράψτε την τομή των τριών 'επιπέδων" στον τετραδιάστατο χώρο:

$$\begin{aligned} u+v+w+z &= 6 \\ u+w+z &= 4 \\ u+w &= 2. \end{aligned}$$

Ποιά είναι η τομή αν συμπεριλάβουμε και το τέταρτο 'επίπεδο" $u=-1$; Βρείτε μία τέταρτη εξίσωση ώστε να μην υπάρχει λύση.

3.2. **Άσκηση.** Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x+by-z &= 0 \\ x-2y-z &= 0 \\ y+z &= 2. \end{aligned}$$

Γιά ποιά τιμή του b χρειάζεται αργότερα να κάνουμε εναλλαγή γραμμών; Γιά ποιά τιμή του b δεν υπάρχει κάποιος οδηγός; Σε αυτή την ιδιόμορφη περίπτωση βρείτε μία μη μηδενική λύση γιά τα x, y, z.

3.3. **Άσκηση.** Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} u+v+w &= -2 \\ 3u+3v-w &= 6 \\ u-v+w &= -1. \end{aligned}$$

(α) Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss (μπορεί να χρειαστεί να αλλάξετε τη σειρά των εξισώσεων)
(β) Θεωρήστε το σύστημα με την αλλαγή σειράς του ερωτήματος (α) και βρείτε τους πίνακες L, U ώστε να γράψετε τον πίνακα του συστήματος A στη μορφή $A = LU$.
(γ) Αλλάξτε τον συντελεστή του v στην 3η εξίσωση ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύση.

3.4. **Άσκηση.** Είναι σωστές ή λανθασμένες οι ακόλουθες παρατηρήσεις για τη διαδικασία απαλοιφής Gauss;

α. Εάν η τρίτη εξίσωση ξεκινά με μηδενικό συντελεστή, τότε δεν αφαιρείται πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 από την εξίσωση 3.
β. Εάν η τρίτη εξίσωση έχει μηδενικό δεύτερο συντελεσ τή τότε δεν αφαιρείται πολλαπλά- σιο της εξίσωσης 2 από την εξίσωση 3.
γ. Εάν η τρίτη εξίσωση έχει μηδενικούς τους δύο πρώτους συντελεσ τές, τότε δεν αφαι- ρείται πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 ή της εξίσωσης 2 από την εξίσωση 3.

3.5. **Άσκηση.** Έστω σημείο (x, y) στο επίπεδο. Οι συντεταγμένες (x', y') του σημείου σε νέο σύστημα αναφοράς στραμμένο κατά γωνία θ είναι

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned}$$

Γράψτε τις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων.

3.6. **Άσκηση.** Θεωρούμε ότι οι στήλες του $n \times n$ πίνακα A είναι τα διανύσματα $c_1, c_2, \ldots, c_n$, και οι γραμμές του $n \times n$ πίνακα B είναι τα διανύσματα-γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Έχουμε δει ότι το γινόμενο δύο τέτοιων διανυσμάτων $c_i r_j$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Εκφράστε το γινόμενο AB ώς άθροισμα τέτοιων πινάκων.

3.7. **Άσκηση.** Βρείτε πόσους πολλαπλασιασμούς χρειάζεται να κάνετε γιά να πολλαπλασιάσετε έναν πίνακα 2×3 με έναν πίνακα 3×5.

3.8. **Άσκηση.** Δείξτε ότι το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι πάλι κάτω τριγωνικός πίνακας. (Δείτε πρώτα ένα παράδειγμα με πίνακες 3×3 και μετά αποδείξτε το γενικά.)

3.9. **Άσκηση.** Δίνεται ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τους πίνακες E^2, E^6 και E^{-1}.

3.10. **Άσκηση.** Ποιοί είναι οι στοιχειώδεις πίνακες E_{21}, E_{32} οι οποίοι φέρνουν τον πίνακα A σε άνω τριγωνική μορφή $E_{32}E_{21}A = U$; Πολλαπλασιάστε με τους πίνακες E_{32}^{-1} και E_{21}^{-1} γιά να παραγοντοποιήσετε τον A σε $LU = E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}U$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.11. **Άσκηση.** Βρείτε τρεις 2×2 πίνακες A, διαφορετικούς από τους I και $-I$, οι οποίοι είναι ίσοι με τους αντιστρόφους τους, δηλαδή, $A^2 = I$.

3.12. **Άσκηση.** Βρείτε τις παραγοντοποιήσεις $PA = LDU'$ γιά τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

3.13. **Άσκηση.** Δείξτε ότι ένας 2×2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν $ad - bc \neq 0$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$