

## Αναλυτική Γεωμετρία (χειμερινό εξάμηνο 2011)

### 1. Φυλλάδιο ασκήσεων I

1.1. **Άσκηση.** Σε κάθε τρίγωνο  $ABC$  αποδείξτε ότι ισχύει η σχέση

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}).$$

Γενικότερα:

$$|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

1.2. **Άσκηση.** Έστω  $ABCD$  τραπέζιο με βάσεις  $AD$  και  $BC$ . Έστω  $K, L$  τα μέσα των διαγωνίων των  $AC, BD$  αντιστοίχως και  $M, N$  τα μέσα των πλαγίων πλευρών  $AB, CD$  αντιστοίχως. Αποδείξτε τις σχέσεις

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}), \quad \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}).$$

1.3. **Άσκηση.** Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο (i)  $(2, 2)$ , (ii)  $(3, 0)$ , (iii)  $(a, 2a)$ , (iv)  $(2, 2, 0)$ .

1.4. **Άσκηση.** Είναι τα διανύσματα  $\vec{u} = (3, -1, 1)$  και  $\vec{v} = (6, -2, 3)$  παράλληλα;

1.5. **Άσκηση.** Υπολογίστε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

1.6. **Άσκηση.** Βρείτε το εμβαδόν παραλληλογράμμου με πλευρές  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

1.7. **Άσκηση.** Υπολογίστε τα εξωτερικά γινόμενα

$$\begin{array}{ccc} \vec{i} \times \vec{i}, & \vec{j} \times \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{k} \\ \vec{i} \times \vec{j}, & \vec{j} \times \vec{k}, & \vec{k} \times \vec{i} \end{array}$$

1.8. **Άσκηση.** Δείξτε ότι για το διπλό εξωτερικό γινόμενο ισχύει

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

1.9. **Άσκηση.** Δείξτε ότι

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = 0.$$

1.10. **Άσκηση.** Υποθέτουμε ότι  $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$  δηλαδή  $(a_1, a_2, a_3) = \beta(b_1, b_2, b_3) + \gamma(c_1, c_2, c_3)$ . Γράψτε υπό μορφή ορίζουσας το  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  και δείξτε ότι είναι μηδέν.