

ΣΧΗΜΑ 1. Ελλειπτικός κύλινδρος

7. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

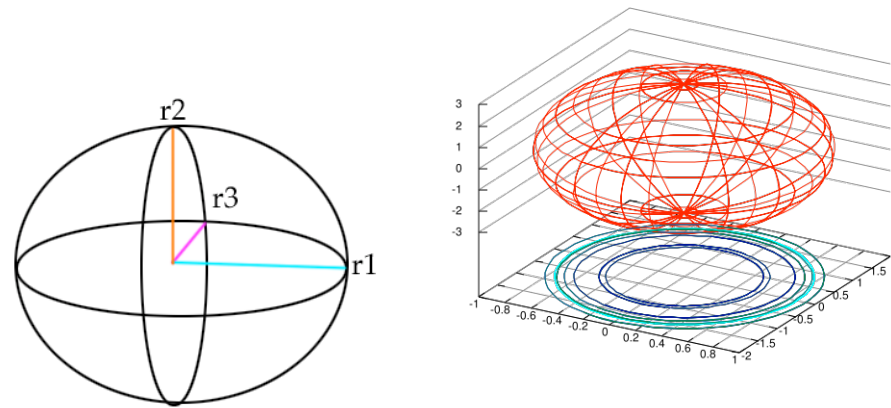
7.1. Κύλινδρος. Στην γεωμετρία η λέξη κύλινδρος χρησιμοποιείται συνήθως με μία στενή έννοια. Μπορούμε να την επεκτείνουμε και να δώσουμε έναν γενικότερο ορισμό.

Κύλινδρος είναι η επιφάνεια που σχηματίζεται από όλες τις ευθείες οι οποίες (α) είναι παράλληλες σε δεδομένη ευθεία του χώρου και (β) διέρχονται από δεδομένη καμπύλη στο επίπεδο.

Παράδειγμα. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα z και η δεδομένη καμπύλη στο επίπεδο xy είναι κύκλος, τότε προκύπτει ο συνήθης κύλινδρος. \square

Παράδειγμα. Αν υποθέσουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα z και η δεδομένη καμπύλη στο επίπεδο xy είναι έλλειψη, τότε έχουμε τον ελλειπτικό κύλινδρο. Η εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \square$$



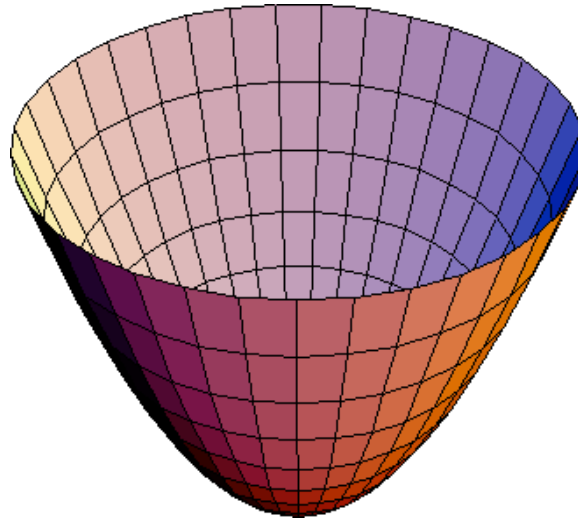
ΣΧΗΜΑ 2. Ελλειψοειδές

7.2. **Ελλειψοειδές.** Γενικεύοντας την εξίσωση της έλλειψης $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ γράφουμε στις τρεις διαστάσεις την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα xy , xz και yz είναι ελλείψεις με άξονες b, c και c, a και a, b αντίστοιχα. Αυτό το βλέπουμε θέτοντας αντίστοιχα $z = 0, y = 0, x = 0$.
- Το ελλειψοειδές τέμνει τους άξονες στα σημεία $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ και $(0, 0, \pm c)$.
- Η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς καθένα από τα επίπεδα xy , xz και yz , διότι όλες οι μεταβλητές είναι υψωμένες στο τετράγωνο.
- Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα $z = z_0$ ($|z_0| < c$) είναι ελλείψεις:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2(1 - z_0^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - z_0^2/c^2)} = 1.$$

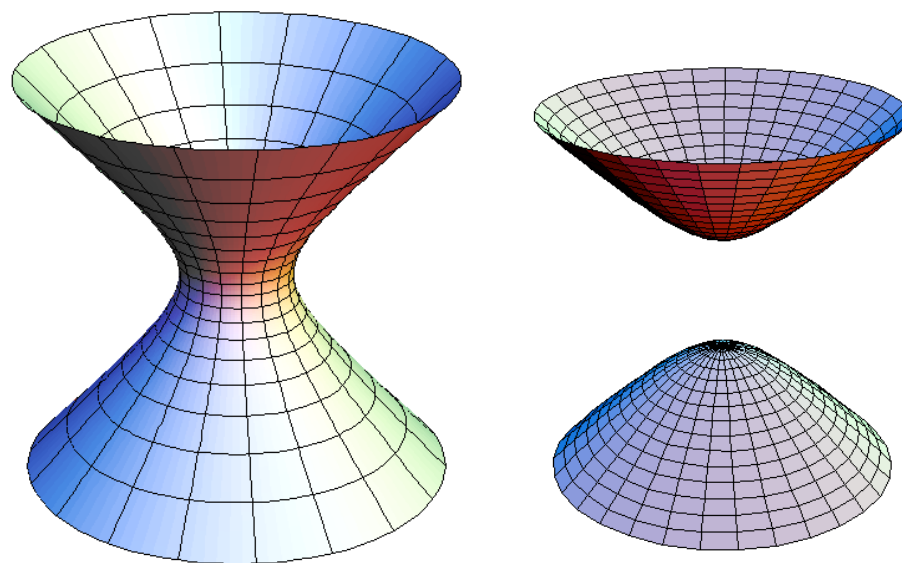


ΣΧΗΜΑ 3. Παραβολοειδές εκ περιστροφής

7.3. **Παραβολοειδές.** Η εξίσωση της παραβολής $z = x^2$ μπορεί να γενικευτεί στις τρεις διαστάσεις ως εξής:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

Αν $a = b$ τότε λέμε ότι έχουμε ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής (γύρω από τον άξονα z).



ΣΧΗΜΑ 4. Μονόχωνο υπερβολοειδές. Δίχωνο υπερβολοειδές

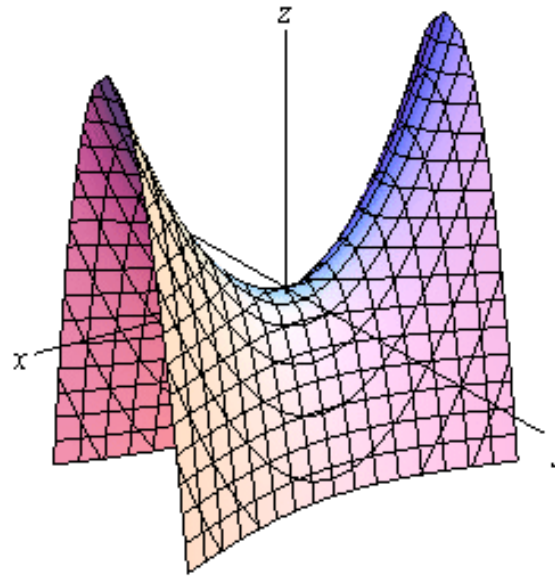
7.4. Υπερβολοειδές. .

Μονόχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Δίχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



ΣΧΗΜΑ 5. Υπερβολικό παραβολοειδές

7.5. Υπερβολικό παραβολοειδές.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0.$$

Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα είναι

$$x = 0 \quad \text{παραβολή} \quad z = \frac{c}{b^2} y^2$$

$$y = 0 \quad \text{παραβολή} \quad z = -\frac{c}{a^2} x^2$$

$$z = z_0 \quad \text{υπερβολή} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c}.$$

Η επιφάνεια περνάει από την αρχή των αξόνων. Εάν κινούμαστε στο επίπεδο xz αυτό είναι ελάχιστο, ενώ αν κινούμαστε στο επίπεδο yz αυτό είναι μέγιστο. Η επιφάνεια έχει σαγματικό σχήμα.