

Διατηρητική δύναμη - Κίνηση κοντά σε σημείο ισορροπίας

(1)

A) Έστω σώμα με μάζα m κινείται σε 1 διάσταση, υπό την επίδραση δύναμης $F(x)$ που εξαρτάται μόνο από τη θέση x . Αυτή η δύναμη λέγεται Διατηρητική, διότι διατηρείται η ολική ενέργεια $E = K + U$ (1)

$K =$ κινητική ενέργεια $= \frac{m v^2}{2}$, $v = \frac{dx}{dt} =$ ταχύτητα

$U = U(x) =$ δυναμική ενέργεια.

[Απόδειξη: Η εξίσωση κίνησης είναι

$m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$. Πολλαπλασιάζοντας επί $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$m \int \left(\frac{dx}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) dt = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E + \int F(x) \frac{dx}{dt} dt$$

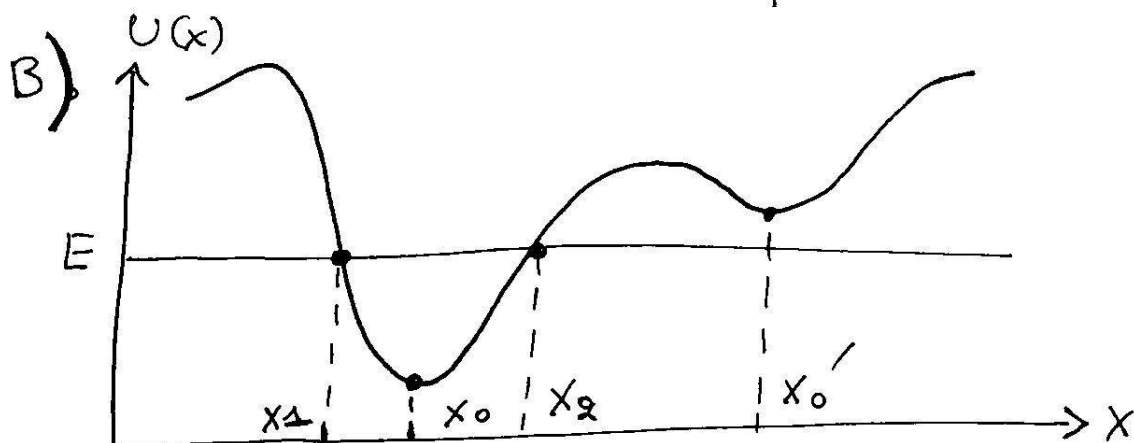
$$= E + \int_{x_0}^x F(x) dx, \quad E = \text{σταθερή ολοκλήρωσης.}$$

Με $U(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx$ (2), προκύπτει η (1).]

Η (2) ισοδυναμεί με την $F(x) = - \frac{dU(x)}{dx}$ (3)

Σε περισσότερες διαστάσεις $\vec{F}(\vec{r}) = - \nabla U(\vec{r})$ (3')

Παραδείγματα διατηρητικής δύναμης είναι η βαρύτητα και η δύναμη Coulomb.



Έστω η κίνηση υπό την επίδραση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ στο σχήμα. (2)

Εάν E είναι η ορισμένη ενέργεια, η κίνηση περιορίζεται στο διάστημα $x_1 \leq x \leq x_2$ (4), διότι $U(x_1) = U(x_2) = E$ και η $k \geq 0$.

Επίσης από την (1) εύκολα βρίσκουμε την ταχύτητα $|v|$ σε κάποια θέση x του (4), εφόσον γνωρίζουμε την $U(x)$ και την E .

Κοντά στο ελάχιστο x_0 μπορούμε να γράψουμε

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{k}{2} (x-x_0)^2 + O(x-x_0)^3,$$

$$\text{όπου } k = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} \text{ και } \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0.$$

Οπότε έχουμε την παραβολική προσέγγιση της $U(x)$ για το x_0 , το x_0' κλπ:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{k}{2} (x-x_0)^2. \text{ Θέτοντας τώρα } x_0=0$$

$$\text{έχουμε } F(x) = -\frac{dU}{dx} = -k \cdot x$$

Έτσι η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \text{ Η λύση } x(t) \text{ είναι κομ}$$

απλή - κάνετε αντίθετα όση να το δείτε:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

και $A, B = \text{σταθερές}$. Αυτή η κίνηση λέγεται αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ω .

Αντιστοιχεί σε μικρές απομακρύνσεις $x(t)$ από τη θέση ισορροπίας.