9^{η} Σειρά Ασκήσεων - Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Ασκ. 1

$\boxed{32.8}$ Το ηλεκτρικό πεδίο ενός ημιτονοειδούς Η/Μ κύματος ικανοποιεί την εξίσωση

$$E = -\left(375\ \frac{V}{m}\right)\sin\left[\left(5{,}97\cdot 10^{15}\ \frac{rad}{s}\right)t + \left(1{,}99\cdot 10^{7}\ \frac{rad}{m}\right)x\right]$$

(α) Ποιό το πλάτος του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αυτού του κύματος;

(β) Ποιά η συχνότητα, το μήκος κύματος και η περίοδος του κύματος; Είναι αυτό το Η/Μ κύμα ορατό στον άνθρωπο;

(γ) Ποιά η ταχύτητα αυτού του κύματος;

Λύση: (α) $E = -E_{max}\sin(\omega t + kx)$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: $\omega = ck$, c=ταχύτητα του φωτός.

$E_{max} = 375\ \frac{V}{m}$ // $B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \frac{375\ \frac{V}{m}}{3\cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}} = 1{,}25\ \mu T$ //

(β) $\omega = 5{,}97\cdot 10^{15}\ \frac{rad}{s}$, $k = 1{,}99\cdot 10^{7}\ \frac{rad}{s}$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = 9{,}5\cdot 10^{14}\ Hz$

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 316\ nm$ $\rightsquigarrow$ Δεν είναι στο ορατό φάσμα!

$T = \frac{1}{f} = 1{,}05\ fs$

(γ) $v = f\lambda = 9{,}5\cdot 10^{14}\ s^{-1}\ 316\cdot 10^{-9}\ m = 3\cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}$ //

↳ Δεν αποτελεί καμμία έκπληξη! Η ταχύτητα οποιουδήποτε Η/Μ κύματος στο κενό ισούται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

ΠΡΟΣΟΧΗ: το κύμα αυτό οδεύει πρός τα αριστερά, δηλ. από μεγαλύτερα προς μικρότερα x.

Δεξιά οδεύει το κύμα $\sin(kx - \omega t)$.

Ασκ.2 2

$\boxed{32.18}$ Ένα ημιτονοειδές Η/Μ κύμα εκπεμπόμενο από ένα κινητό τηλέφωνο έχει μήκος κύματος 35,4 cm και πλάτος ηλεκτρικού πεδίου $5{,}4 \cdot 10^{-2}\ \frac{V}{m}$ σε απόσταση 250 m από την κεραία. Υπολογίστε (α) τη συχνότητα του κύματος, (β) το πλάτος του μαγνητικού πεδίου, (γ) την ένταση του κύματος.

Λύση: (α) $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{0{,}354\,m} \Rightarrow f = 847\ MHz$ //

(β) $B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \frac{5{,}4 \cdot 10^{-2}\ \frac{V}{m}}{3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}} \Rightarrow B_{max} = 1{,}8 \cdot 10^{-10}\ T$ //

(γ) $I = S_{av.} = \frac{E_{max} B_{max}}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_{max}^2$, $1\mu = 10^{-6}$

$= \frac{1}{2}\, 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \left(5{,}4 \cdot 10^{-2} \frac{V}{m}\right)^2 \Rightarrow I = 3{,}87\ \mu W/m^2$ //

Γενικά [πλην εξαιρέσεων όπως η δέσμη laser]
$I(r) = I_0 / r^2$. Άρα για $r = 500\,m$ (αντί 250 άνω)
θα έχουμε και $I = I(r = 250m)/4 = 0{,}967\ \mu W/m^2$.
$\Rightarrow$ ΔΕΙΤΕ και Ασκ. 5!

Ασκ.3

$\boxed{32.39}$ Ένα μικρό laser ηλίου-νέου εκπέμπει ερυθρό φως με ισχύ 3,2 mW σε μια δέσμη διαμέτρου 2,5 mm. (α) Ποιά τα πλάτη του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου του φωτός αυτού; (β) Ποιές οι μέσες ενεργειακές πυκνότητες σχετιζόμενες με το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο; (γ) Πόση ολική ενέργεια περιέχεται σε 1m μήκους της δέσμης;

Λύση: (α) $S_{av} = \frac{P}{A} = \frac{\overset{\text{ισχύς}}{\overset{\downarrow}{P}}}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-3}\,W}{\pi (1{,}25 \cdot 10^{-3}\,m)^2} = 652\ \frac{W}{m^2}$

$I = S_{av} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{max}^2}{\mu_0 c} \Rightarrow E_{max} = \sqrt{2 \mu_0 c I} \Rightarrow E_{max} = 701 \frac{V}{m}$ //

$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = 2{,}34\ \mu T$ //

(β) $u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{max}^2 \cos^2(kx - \omega t)$

$u_{E\,av.} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{max}^2 \underbrace{\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle}_{1/2} \Rightarrow u_{E\,av.} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_{max}^2$

$\Rightarrow u_{E\,av} = 1{,}09\ \mu J/m^3$ //

$$u_{B\,αν.} = \frac{B_{max}^2}{4\mu_0} = 1{,}09\ \mu J/m^3$$

Δηλαδή $u_{B\,αν.} = u_{E\,αν.}$!

(γ) $u_{αν} = u_{E\,αν.} + u_{B\,αν.} = 2{,}18\ \mu J/m^3$

$$U = u_{αν.}\, dV = u_{αν.} (A L) = 2{,}18 \cdot 10^{-6} \frac{J}{m^3}\, \Pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 1m$$

$\Rightarrow U = 1{,}07 \cdot 10^{-11}\ J$ //

$2^{ος}$ τρόπος: $P = \frac{U}{t}$, όπου $t =$ ο χρόνος που χρειάζεται το φως να ταξιδέψει 1m.

$$U = P.t = P\left(\frac{L}{c}\right) = 3{,}2 \cdot 10^{-3} W \left(\frac{1m}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}\right) = 1{,}07 \cdot 10^{-11} J$$ //

Ασκ.4

$\boxed{32.50}$ Ο εφευρέτης του $19^{ου}$ αι. Nikola Tesla πρότεινε την μετάδοση ηλεκτρικής ισχύος μέσω ημιτονοειδών Η/Μ κυμάτων. Έστω ότι η ισχύς μεταδίδεται με δέσμη ενεργού διατομής $100 m^2$. Τι ένταση ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου χρειάζονται για να μεταδώσουν ποσό ισχύος συγκρίσιμο με αυτό που μεταφέρουν οι σύγχρονες γραμμές μεταφοράς (οι οποίες μεταφέρουν τάσεις και ρεύματα της τάξης των 500 kV και 1000 A);

Λύση: $V = 500 kV$, $i = 1000 A$, $A = 100 m^2$

$$I = \frac{P_{αν.}}{A} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_{max}^2 \Rightarrow E_{max} = \sqrt{\frac{2 P_{αν.}}{\varepsilon_0 c A}} = \sqrt{\frac{2 V i}{\varepsilon_0 c A}}$$

$P_{αν.} = V i$

$$\Rightarrow E_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500000 V \cdot 1000 A}{\varepsilon_0 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 100 m^2}} \Rightarrow E_{max} = 6{,}14 \cdot 10^4 \frac{V}{m}$$ //

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = 2{,}05 \cdot 10^{-4}\ T$$ //

Ασκ. 5

32. — Ένας δορυφόρος 575 km πάνω από την επιφάνεια της γης μεταδίδει Η/Μ κύματα συχνότητας 92,4 MHz ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις με ισχύ 25 kW. (α) Ποια η ένταση αυτών των κυμάτων καθώς φτάνουν σε ένα δέκτη στην επιφάνεια της γης ακριβώς κάτω από τον δορυφόρο; (β) Ποιά τα πλάτη του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στον δέκτη; (γ) Εάν ο δέκτης έχει ένα τέλεια απορροφητικό πάνελ διαστάσεων 15 cm επί 40 cm και προσανατολισμένο με το επίπεδο του κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, πόση μέση δύναμη ασκούν αυτά τα κύματα πάνω στο πάνελ; Είναι αυτή η δύναμη αρκετή για να προκαλέσει σημαντικές επιδράσεις;

Λύση: (α) $I = \frac{P_{av.}}{A} = \frac{P_{av.}}{4\pi r^2} = \frac{25000\ W}{4\pi\,(575000 m)^2}$

$\Rightarrow I = 6\ nW/m^2$ // Επίσης, δείτε ότι $I(r) = \frac{I_0}{r^2}$, όπως στο σκέλος β). Αυτό ισχύει γενικά [ΕΚΤΟΣ από π.χ. δέσμη laser...]

Επειδή η εκπομπή είναι ομοιόμορφη προς όλες τις διευθύνσεις (ισότροπη) θεωρούμε ότι αυτή η ισχύς περνά από σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r.

(β) Θεωρούμε ότι ο πομπός του δορυφόρου είναι μια διπολική κεραία, το πεδίο της οποίας δίνεται από:
$E(r,\theta,t) = \frac{E_0}{r}\sin\theta\,\sin(kr-\omega t)$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{r}$ με τον άξονα z και θα πάρουμε $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Άρα $E(r,t) = \frac{E_0}{r}\sin(kr-\omega t)$

$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{E_0}{r}\right)^2 \sin^2(kr-\omega t)$

$I = S_{av.} = \frac{1}{2\mu_0 c}\left(\frac{E_0}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left(\frac{E_0}{r}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{E_0}{r}\right) = E_{max} = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}}$

↳ Εδώ: $I(r) = I_0/r^2$! – βλ. και Ασκ. 2.

$$\Rightarrow E_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-9}\ W/m^2}{(8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2)\, 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}}} \Rightarrow E_{max} = 2{,}13 \cdot 10^{-3}\ \frac{N}{C} \,//$$

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \frac{2{,}13 \cdot 10^{-3}\ N/C}{3 \cdot 10^8\ m/s} \Rightarrow B_{max} = 7{,}1 \cdot 10^{-12}\ T \,//$$

(γ) Για τέλειο απορροφητή, η πίεση ακτινοβολίας δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{P_{rad} = \frac{S_{av.}}{c}} = \frac{I}{c}$$

Γενικά η πίεση δίνεται από $p = \frac{F}{A}$ (δύναμη που ασκείται ανά μονάδα επιφάνειας)

Άρα, $\frac{I}{c} = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \frac{I}{c} A = \frac{6 \cdot 10^{-9}\ W/m^2 \cdot 0{,}15m \cdot 0{,}4m}{3 \cdot 10^8\ m/s}$

$\Rightarrow F = 1{,}2 \cdot 10^{-18}\ N \,//$

Αυτή η δύναμη είναι ανεπαίσθητη για να προκαλέσει κάποιο αποτέλεσμα.