

8^η Σειρά Ασκήσεων - Μαγν. ρού - Κύκλωμα RLC

Ασκ. 1

29.52 Είσαι ναυαγός σε ένα έρημο τροπικό νησί. Διαθέτεις μερικές ηλεκτρικές συσκευές που θα μπορούσες να λειτουργήσεις χρησιμοποιώντας μια γεννήτρια αλλά δεν έχεις μαγνήτες. Το μαγνητικό πεδίο της Γης στην τοποθεσία που βρίσκεσαι είναι οριζόντιο με μέτρο $8 \cdot 10^{-5} T$ και αποφασίζεις να χρησιμοποιήσεις αυτό το πεδίο για την γεννήτρια περιστρέφοντας με υψηλό ρυθμό ένα μεγάλο κυκλικό συρμάτινο πηνίο. Πρέπει να παράξεις μια μέγιστη ηλεκτρεγερτική δύναμη (emf) $9 V$ και εκτιμάς ότι μπορείς να περιστρέφεις το πηνίο με τον στρόφαλο (μανιβέλα) με ρυθμό 30 rpm (περιστροφές ανά λεπτό). Το πηνίο σου έχει αποδεκτή αντίσταση και ο μέγιστος αριθμός περιτυλίξεων του πηνίου είναι 2000.

(α) Πόση επιφάνεια πρέπει να έχει το πηνίο; (β) Εάν το πηνίο είναι κυκλικό, ποια είναι η μέγιστη γραμμική ταχύτητα ενός σημείου στο πηνίο καθώς περιστρέφεται; Πιστεύετε ότι αυτή η διάταξη είναι εφικτή; Εξηγήστε.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d(\vec{B} \cdot \vec{A})}{dt} = - \omega B A \sin \omega t$$

$$\mathcal{E}_{\max} = N \omega B A$$

$$30 \text{ rpm} = \frac{30 \cdot 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega$$

$$(a) A = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\omega N B} = \frac{9 \text{ V}}{\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 2000 \cdot 8 \cdot 10^{-5} \text{ T}} = 18 \text{ m}^2 //$$

$$(b) v = \omega r, \pi r^2 = A \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

$$v = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \omega = \sqrt{\frac{18 \text{ m}^2}{\pi}} \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow v = 7,5 \text{ m/s} //$$

Η διάταξη αυτή δεν είναι εφικτή. Ένας λόγος είναι ότι η αντίσταση του αέρα δεν είναι αμελητέα! → και οι δυνάμεις του ναυαγού ολιγοίεε!

Ασκ. 2

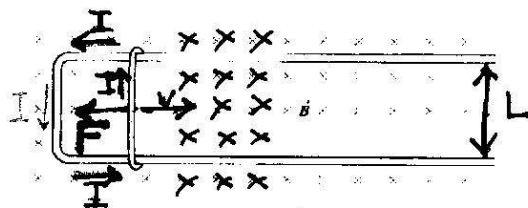
29.65 Θεωρήστε έναν τετραγωνικό βρόχο πλάτους L και έλα σύρμα που ολισθαίνει πάνω σ' αυτόν μάζας m όπως φαίνεται στο σχήμα. Ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B βρίσκεται κάθετο στο επίπεδο του βρόχου με κατεύθυνση προς τα μέσα της σελίδας. Δίνεται μια αρχική ταχύτητα v_0 στο σύρμα και μετά αφήνεται. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του σύρματος και του βρόχου και η αντίσταση του βρόχου είναι αμελητέα σε σχέση με την αντίσταση R του σύρματος.

(α) Εξάγετε μια σχέση για τη F , το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σύρμα ενώ αυτό κινείται με ταχύτητα v . (β) Δείξτε ότι το διάστημα που θα κινηθεί το σύρμα μέχρι την ηρεμία είναι $x = mv_0 R / L^2 B^2$.

ΔΕΝ έγινε στην τάξη.

Δείτε τη για πιο ηγάρη

κατανόηση της δυναμικής σε μαγνητικό πεδίο.



$$(a) \mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - B \frac{dA}{dt} = - BL \frac{dx}{dt} = - BLv$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv}{R}$$

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B} = IBL \sin 90^\circ \Rightarrow F = B \overset{\downarrow}{I} L \Rightarrow F = \frac{B^2 L^2 v}{R} //$$

Προσοχή! Το ρεύμα έχει αυτή τη φορά διότι η ΗΕΔ έχει φορά από κάτω προς τα πάνω στο κύκλωμα.

Από την άξηση, η $\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$ έχει αυτή τη διεύθυνση διότι πρέπει να είναι κάθετη στο \vec{B} και το \vec{I} (καιόντας δεξιά χεριού).

$$(b) \sum \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow -F = ma_x \Rightarrow -\frac{F}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = - \frac{B^2 L^2 v}{mR} \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} = - \frac{B^2 L^2}{mR} \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-B^2 L^2 t / mR}$$

Για $t_0 = 0$ είχε $v = v_0$

Για $t \rightarrow \infty$ θα έχει $v = 0$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-B^2 L^2 t / mR} \Rightarrow \int_0^x dx' = \int_0^t v_0 e^{-B^2 L^2 t' / mR} dt'$$

$$\Rightarrow x = v_0 \left(-\frac{mR}{B^2 L^2} \right) e^{-B^2 L^2 t' / mR} \Big|_0^t$$

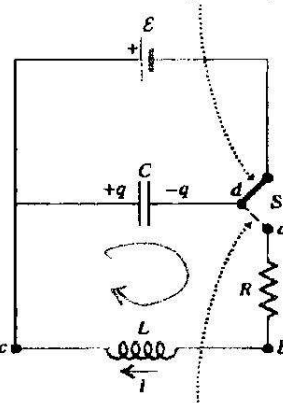
$$\Rightarrow x = \frac{mR v_0}{B^2 L^2} \left(1 - e^{-B^2 L^2 t / mR} \right)$$

Οπότε για $t \rightarrow \infty \Rightarrow v = 0$ (θα σταματήσει)

$$x = \frac{mR v_0}{B^2 L^2} //$$

Ασκ. 3 Για το κύκλωμα του σχήματος, $C = 15.0 \text{ nF}$, $L = 22 \text{ mH}$ και $R = 75 \Omega$. (α) Υπολογίστε τη συχνότητα εναλλαγής του κυκλώματος όταν ο πυκνωτής έχει φορτιστεί και ο διακόπτης έχει ενωθεί στο σημείο α. (β) Πόσος χρόνος χρειάζεται για το πλάτος της ταλάντωσης να πέσει στο 10% της αρχικής του τιμής; (γ) Ποια τιμή της R θα οδηγούσε σε ένα κρίσιμο αποσβαινόμενο κύκλωμα;

When switch S is in this position, the emf charges the capacitor.



When switch S is moved to this position, the capacitor discharges through the resistor and inductor.

3

$$-iR - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad (\text{βρόχος})$$

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\text{Λύση: } q = Q_0 e^{-(R/2L)t} \cos(\omega' t + \phi)$$

Λόγω της αντίστασης, το πλάτος ταλάντωσης του κυκλώματος θα μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

(α) Η συχνότητα αυτής της ταλάντωσης είναι:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{22 \times 10^{-3} \text{ H} \cdot 15 \times 10^{-9} \text{ F}} - \frac{(75 \Omega)^2}{4(22 \times 10^{-3} \text{ H})^2}}$$

$$\Rightarrow \omega' = 5,5 \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{5,5 \times 10^4 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 8,76 \text{ kHz} //$$

(β) Το πλάτος μειώνεται εκθετικά ως $A(t) = A_0 e^{-(R/2L)t}$

Θέτουμε $\frac{A}{A_0} = 0,1$. Λύνουμε ως προς το χρόνο:

$$t = -\left(\frac{2L}{R}\right) \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\left(\frac{2 \cdot 22 \times 10^{-3} \text{ H}}{75 \Omega}\right) \ln(0,1) \Rightarrow t = 1,35 \text{ ms} //$$

(γ) Στην κρίσιμη απόσβεση: $\omega' = 0$ (δεν έχουμε ταλάντωση)

$$\omega' = 0 \Rightarrow \frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{4L}{C}}$$

$$R = \sqrt{\frac{4 \cdot 22 \times 10^{-3} \text{ H}}{15 \times 10^{-9} \text{ F}}} \Rightarrow R = 2420 \Omega //$$

** : Η λύση προκύπτει από τη γενική λύση της

$$Q'' + \beta Q' + \gamma Q = 0 \Rightarrow Q(t) = A_+ e^{p_+ t} + A_- e^{p_- t},$$

όπου $p^2 + \beta p + \gamma = 0 \Rightarrow p = p_{\pm} = -\beta/2 \pm \sqrt{\beta^2/4 - \gamma}$.

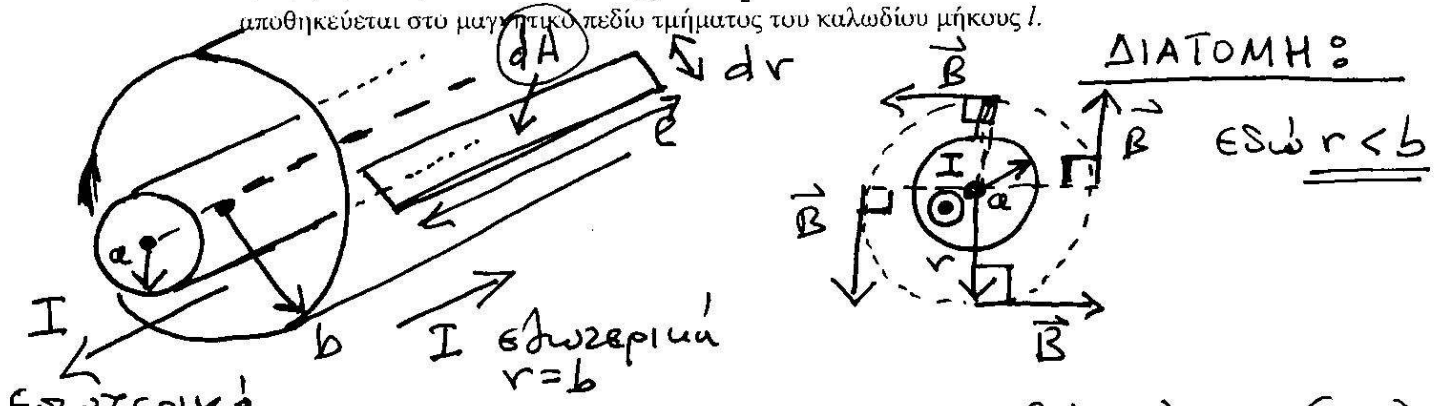
Ασκ.4

30.50 Ομοαξονικό καλώδιο. Μικρός συμπαγής σωλήνας ακτίνας a στηρίζεται σε μονωτικούς δίσκους στον άξονα ενός σωλήνα με λεπτό τοίχωμα και με ακτίνα b . Ο εσωτερικός και ο εξωτερικός αγωγός διαρρέονται από ίσα ρεύματα με αντίθετες φορές. α) Χρησιμοποιήστε τον Νόμο του Αμπερε για να βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο στο χώρο μεταξύ των αγωγών. β) Γράψτε την έκφραση για τη ροή $d\Phi_B$ μέσω στενής λωρίδας μήκους l παράλληλης προς τον άξονα, πλάτους dr σε απόσταση r από τον άξονα του καλωδίου και ευρισκόμενης στο επίπεδο που περιέχει τον άξονα. γ) Ολοκληρώστε την έκφραση του μέρους (β) για να βρείτε την ολική ροή που προκαλεί ρεύμα i στον κεντρικό αγωγό. δ) Δείξτε ότι η αυτεπαγωγή για μήκος l του καλωδίου είναι

(4)

$$L = l \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

ε) Χρησιμοποιήστε την εξ. $U = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} LI^2$ για να υπολογίσετε την ενέργεια που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο τμήματος του καλωδίου μήκους l .



α) Από το Νόμο του Αμπερε $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot (2\pi r)$

$\Rightarrow B(r) = \mu_0 I / 2\pi r$. $\llcorner \mu_0, I$ ομικό

β) $d\Phi_B = d(\vec{B} \cdot \vec{A}) = B \cdot dA = B(r) \cdot \ell dr$.

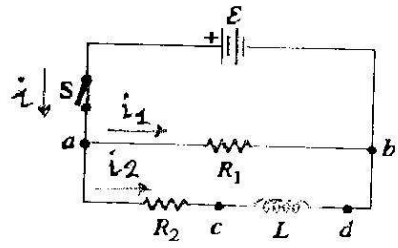
ΕΣΩ $d\vec{A} \parallel \vec{B}$ - δηλ. η dA είναι παράλληλη με την αυξία r από τον άξονα του κυλίνδρου.

βλ. σχήμα. γ) $\Phi_B = \int_a^b d\Phi_B = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$
 $\Rightarrow \Phi_B = \frac{\mu_0 I \ell \ln(b/a)}{2\pi}$

δ) $L = \Phi_B / I$ και ε) $U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

30.69 Στο κύκλωμα του σχήματος $\mathcal{E}=60\text{ V}$, $R_1=40\ \Omega$, $R_2=25\ \Omega$ και $L=0,300\text{ H}$. Ο διακόπτης S είναι κλείνει τη χρονική στιγμή $t=0$. Μόλις μετά το κλείσιμο του διακόπτη, (α) ποια είναι η διαφορά δυναμικού V_{ab} κατά μήκος του αντιστάτη R_1 ; (β) Ποιο σημείο, το a ή το b βρίσκεται σε ψηλότερο δυναμικό; (γ) Ποια είναι η διαφορά δυναμικού V_{cd} κατά μήκος του επαγωγού L ; (δ) Ποιο σημείο το c ή το d βρίσκεται σε ψηλότερο δυναμικό;

Ο διακόπτης αφήνεται κλειστός για αρκετό χρονικό διάστημα και μετά ανοίγεται. Μόλις ανοίξει ο διακόπτης, (ε) ποια είναι η διαφορά δυναμικού V_{ab} κατά μήκος του αντιστάτη R_1 ; (στ) Ποιο σημείο, το a ή το b βρίσκεται σε ψηλότερο δυναμικό; (ζ) Ποια είναι η διαφορά δυναμικού V_{cd} κατά μήκος του επαγωγού L ; (η) Ποιο σημείο το c ή το d βρίσκεται σε ψηλότερο δυναμικό;



(α) Πάνω βρόχος: $\mathcal{E} - V_{R_1} = 0 \Rightarrow V_{R_1} = V_{ab} = \mathcal{E} = 60V //$

(β) Το σημείο α βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό διότι η τάση πέφτει καθώς προχωρούμε κατά μήκος του αντιστάτη κατά τη φορά του ρεύματος.

(γ) Εξωτερικός βρόχος (δηλ. χωρίς την R_1):

$$\mathcal{E} - V_{R_2} - V_L = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - i_2 R_2 - L \left| \frac{di_2}{dt} \right| = 0$$

Όμως $i_2 = 0$ διότι μόλις κλείνει ο διακόπτης, δεν έχει προλάβει το ρεύμα να ιεραστεί από τον κάτω κλάδο (λόγω του ωπνίου, ο ρυθμός αύξησης του ρεύματος περιορίζεται από την εισαχόμενη ΗΕΔ).

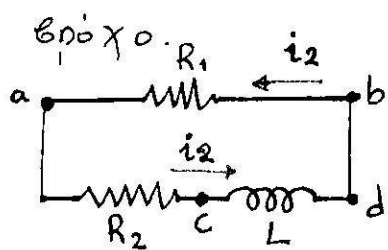
Οπότε, $V_L = \mathcal{E} = 60V //$

(δ) Εφόσον η τάση πέφτει μειούμενοι από το α προς το β τότε το c ιεραστεί να βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό από το d. ($V_c > V_d$)

(ε) Αφού έμεινε για αρκετό χρόνο ο διακόπτης, το ρεύμα i_2 ιεραστεί να φτάσει σε μια σταθερή τιμή και δεν μεταβάλλεται άλλο, δηλ. $\frac{di_2}{dt} \rightarrow 0$. Οπότε $V_L = L \left| \frac{di_2}{dt} \right| = 0$ και $\mathcal{E} = V_{R_2}$

$$\mathcal{E} = i_2 R_2 \Rightarrow i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{60V}{25\Omega} \Rightarrow i_2 = 2,4A$$

Για τον ίδιο λόγο με το (δ), το i_2 δεν ιεραβαίνει να μειωθεί μόλις κλείσει ο διακόπτης, οπότε θα είναι $i_2 = 2,4A$. Με ανοικτό διακόπτη (μόλις ανοίξει) έχουμε μόνο τον πάνω



$$V_{a \rightarrow b} = -i_2 R_1 \quad (\text{το μείον διότι προχωρούμε από το a στο b ενώ με αντίθετα στο ρεύμα})$$

$$= -2,4A \cdot 40\Omega$$

$$\Rightarrow V_{ab} = -96V //$$

(6τ) Το b είναι σε υψηλότερο δυναμικό διότι η τάση ^⑥ πέφτει κατά μήκος της R_1 καθώς προχωρούμε με τη φορά του ρεύματος (δηλ. από το a προς το b).

(5) $V_L - V_{R_1} - V_{R_2} = 0$ (κλείω βρόχος)

$$\Rightarrow \boxed{V_L = V_{R_1} + V_{R_2}}$$

$$V_{R_1} = -V_{ab} = 96 \text{ V}$$

$$V_{R_2} = i_2 R_2 = 2,4 \text{ A} \cdot 25 \Omega = 60 \text{ V}$$

$$\leadsto V_L = 96 \text{ V} + 60 \text{ V} \Rightarrow V_L = 156 \text{ V}$$

$$V_{cd} = -V_L = -156 \text{ V} //$$

(π) Η τάση αυξάνει κατά μήκος το κοινίου προχωρώντας με τη φορά του ρεύματος. Οπότε το d βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό.