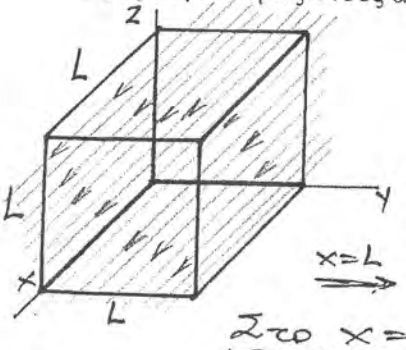
7η Σειρά Ασκήσεων – Πηγές Μαγνητικού Πεδίου

28.53 Ένας νεοφώτιστος σχεδιαστής μαγνητών σας λέει ότι μπορεί να παράξει μαγνητικό πεδίο *B* σε κενό το οποίο δείχνει παντού στη x-διεύθυνση και το οποίο αυξάνει σε μέτρο αυξάνοντας το x. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{B} = Bo(x/a)\hat{\imath}$, όπου *Bo* και *a* είναι σταθερές με μονάδες tesla και μέτρου αντίστοιχα. Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Gauss για μαγνητικά πεδία για να δείξετε ότι αυτός ο ισχυρισμός είναι αδύνατος. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε Γκαουσιανή επιφάνεια σε σχήμα τετράγωνου κουτιού, με έδρες παράλληλες στους άξονες-x, -y, και -z.)



$\vec{B} = B_o\left(\frac{x}{a}\right)\hat{\imath}$ ⇝ Αυτό σημαίνει ότι ροή μαγνητικού πεδίου έχουμε μόνο από τις πλευρές που είναι παράλληλες στο επίπεδο-yz, στο x=0 & x=L.

Οπότε: Στο x=L ⇝ $\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = B_o\left(\frac{x}{a}\right)\int \cancel{(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath})}^{1}\, dA$

$\xrightarrow{x=L} \Phi_B = B_o\frac{L^3}{a}$

Στο x=0: $\Phi_B = 0$ (αφού x=0)

Στις υπόλοιπες πλευρές $\Phi_B = 0$ (αφού δεν έχουμε μαγνητικές δυναμικές γραμμές να τις διαπερνούν).

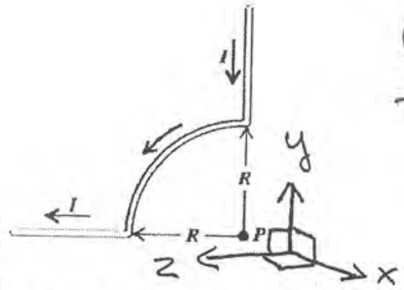
Όμως ο N. Gauss λέει ότι $\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$ $(= \Phi_B)$, άρα δεν μπορεί να είναι $\Phi_B = B_o\frac{L^3}{a}$ ⟹ Το συγκεκριμμένο $\vec{B}$ είναι αδύνατο διότι παραβιάζει τον νόμο του Gauss.

Παρεπέρα: δείξαμε στην τάξη ότι το μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_o\{(x/a)\hat{\imath} + (y/b)\hat{\jmath}\}$ είναι συμβατό με το νόμο του Gauss.

28.67 Το σύρμα του σχήματος διαρρέεται από ρεύμα *I* με τη φορα που φαινεται. Το σύρμα αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα πολύ μεγάλου μήκους, ένα τεταρτημόριο περιφέρειας ακτίνας *R* και ένα δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα μεγάλου μήκους. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του ολικού μαγνητικού πεδίου στο κέντρο καμπυλότητας του τεταρτημορίου (σημείο *P*).

Το σύρμα είναι στο επίπεδο (yz). Χρησιμοποιούμε το νόμο Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$$



Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕΝ συνεισφέρουν, διότι $d\vec{\ell} \parallel \hat{r} \Rightarrow d\vec{\ell}\times\hat{r} = 0$ για το σημείο P.

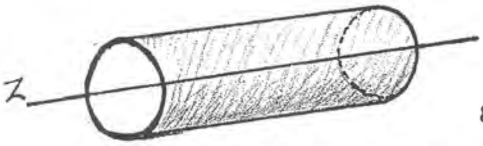
Για τον κυκλικό τομέα έχουμε $d\vec{l} \perp \vec{r}$

$\Rightarrow |d\vec{l}\times\hat{r}| = dl$ αμέσως, $r=R$.

Έτσι $\vec{B} = B_0\hat{x}$ στο P, όπου $B_0=\int dB$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot L}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{8R}, \quad L=\int dl = \frac{\pi R}{2}.$$

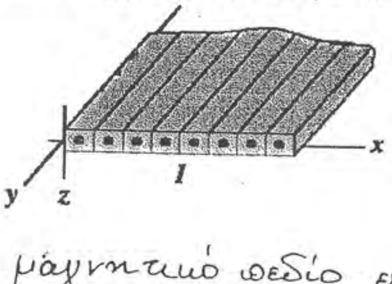
28.73. Το ηλεκτρικό πεδίο μιας άπειρης γραμμής θετικού φορτίου δείχνει ακτινικά προς τα έξω από το σύρμα και μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο. Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Gauss για τον μαγνητισμό για να δείξετε ότι το μαγνητικό πεδίο ενός άπειρου ευθύγραμμου αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα δεν μπορεί να έχει ακτινική συνιστώσα.



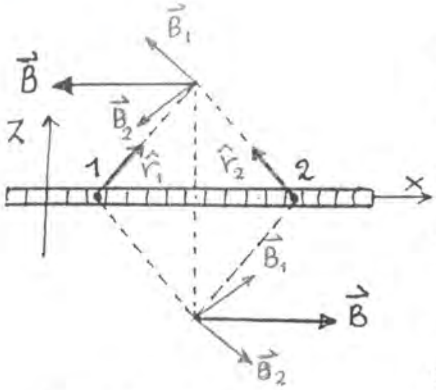
Παίρνουμε κλειστή κυλινδρική Γκαουσιανή επιφάνεια με τον άξονα της να ταυτίζεται με το σύρμα φορτίου. Αν υπάρχει z-συνιστώσα του πεδίου, πρέπει να είναι σταθερή (δηλ. να μην εξαρτάται από το z) λόγω της συμμετρίας του σύρματος. Δηλ. όση ροή μπαίνει από την επιφάνεια στο ένα άκρο βγαίνει από το άλλο. $\Rightarrow \Phi_{B\perp}=0$

Λόγω του ότι $\Phi_B=\oint \vec{B}\cdot d\vec{A}=0$ θα πρέπει και η Φ_B στην παράπλευρη επιφάνεια να είναι μηδέν $\Rightarrow \int B_r\, dA=0 \Rightarrow B_r=0$. Άρα δεν υπάρχει ακτινική συνιστώσα.

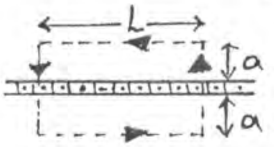
28.79 Επίπεδο ρεύμα απείρων διαστάσεων. Ευθύγραμμοι αγωγοί μεγάλου μήκους, τετραγωνικής διατομής με ρεύμα *I* ο καθένας, τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να εφάπτονται μεταξύ τους και να σχηματίζουν ένα φύλλο που διαρρέεται από ρεύμα (βλ. σχήμα). Οι αγωγοί βρίσκονται πάνω στο επίπεδο-xy, είναι παράλληλοι προς τον άξονα-y και το ρεύμα τους είναι προς την κατεύθυνση–(+y). Υπάρχουν *n* αγωγοί ανά μονάδα μήκους κατά μήκος του άξονα-x. Υπολογίστε το μέτρο και τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση *a* (α) κάτω από το φύλλο· (β) πάνω από το φύλλο.



Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο ενός μακρού ευθύγραμμου αγωγού, διαρρεόμενου από ρεύμα είναι περιμετρικό. Άρα, στη συγκεκριμένη διάταξη έχουμε την υποψία ότι το $\vec{B}$ θα είναι προς τ' αριστερά, πάνω από το επίπεδο και προς τα δεξιά κάτω από αυτό (το I είναι προς τα έξω ⊙, κανόνας δεξιού χεριού). Αυτό όμως θα το αποδείξουμε με το επόμενο σχήμα.



Θεωρούμε τους ρευματοφόρους αγωγούς ανά ζεύγη, τον καθένα σε ίση απόσταση από το σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε το $\vec{B}$. Οι z-συνιστώσες των $\vec{B}_1, \vec{B}_2$ αλληλοαναιρούνται και επιζούν μόνο οι x. Άρα το $\vec{B}$ είναι όπως προαναφέραμε.

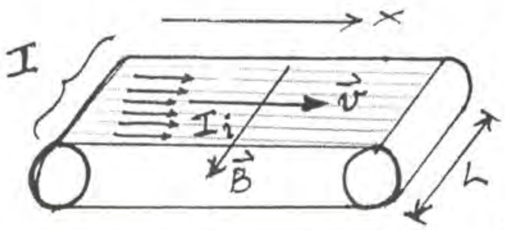


Θα εφαρμόσουμε τώρα τον N. Ampère με κλειστό ορθογώνιο βρόχο όπως στο σχήμα. Λόγω συμμετρίας, το $\vec{B}$ σε απόσταση a πάνω από το επίπεδο θα έχει την ίδια ένταση με το $\vec{B}$ σε απόσταση a από κάτω.

Οι πλαϊνές πλευρές (2a) δεν συνεισφέρουν $\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ διότι εκεί $\vec{B} \perp d\vec{l}$.

Οπότε, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{εγκ.} \Rightarrow B\,2L = \mu_0 n I L \Rightarrow B = \frac{1}{2}\mu_0 n I$ //

28.86. Η πάνω επιφάνεια μιας φαρδιάς, μονωτικής ταινίας μεγάλου μήκους είναι φορτισμένη ομοιόμορφα με θετικό φορτίο επιφανειακής πυκνότητας σ. Με τη βοήθεια περιστρεφόμενων κυλίνδρων που βρίσκονται στα άκρα της, η ταινία κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα υ. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από την κινούμενη ταινία σε κάποιο σημείο μόλις πάνω από την επιφάνεια της. [*Υπόδειξη*: Σε σημεία κοντά στη επιφάνεια, μακριά από τα άκρα της, η κινούμενη ταινία μπορεί να θεωρηθεί ως επίπεδο ρεύμα απείρων διαστάσεων (προηγούμενο πρόβλημα).]



Λόγω της υπόδειξης, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου προβλήματος.

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{εγκ} = \mu_0 I$

$\Rightarrow B\cdot 2L = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2L}}$, όπου

I τώρα είναι το συνολικό ρεύμα! Άρα $n = \frac{I}{L}$ ο συνολικός αριθμός των στοιχειωδών ρευματοφόρων αγωγών.

$\left(\frac{\text{Συνολικό Ρεύμα}}{\text{Συνολικό Μήκος}}\right)$

$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ με $\Delta Q = \sigma A = \sigma L \Delta x$

$\Rightarrow I = \sigma L \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sigma L v \Rightarrow \frac{I}{L} = \sigma v$

$n = \frac{I}{L} = \sigma v$

$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{L} \Rightarrow B = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma v$ //

Το $\vec{B}$ είναι προς τα έξω από τη σελίδα μας λόγω του ότι το I έχει την κατεύθυνση του $\vec{v}$ (κανόνας δεξιού χεριού)