3η σειρά ασκήσεων – Ηλεκτρικό δυναμικό

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ : Οι αριθμοί "κεφάλαιο.αριθμός" των ασκήσεων αναφέρονται στο βιβλίο των **Young & Freedman (YF)** . Π.χ. 21.28 = κεφάλαιο 21, αριθμός 28.

Άσκηση 1. α) Ποιό έργο απαιτείται ώστε 2 πρωτόνια, που βρίσκονται σε αρχική απόσταση $r_1 = 2{,}0\ 10^{-10}$ m (μια τυπική ατομική απόσταση), να πλησιάσουν σε τελική απόσταση $r_2 = 3{,}0\ 10^{-15}$ m (μια τυπική πυρηνική απόσταση);

β) Αν και τα 2 πρωτόνια αφεθούν από την ηρεμία στη τελική απόσταση r_2 του σκέλους α), ποιές είναι οι ταχύτητές τους όταν φτάνουν στην αρχική τους απόσταση r_1 ;

Άσκηση 2. - 23.21 YF . Δύο σημειακά φορτία $q_1 = +2{,}40$ n C και $q_2 = -6{,}50$ n C βρίσκονται σε απόσταση 0,10 m μεταξύ τους. Το σημείο A βρίσκεται στο μέσο της απόστασής τους, ενώ το σημείο B απέχει 0,08 m από το q_1 και 0,06 m από το q_2 . Θεωρήστε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μηδέν στο άπειρο. Βρείτε α) το δυναμικό στο σημείο A, β) στο σημείο B και γ) το έργο που εκτελεί το ηλεκτρικό πεδίο πάνω σε φορτίο $q = +2{,}50$ n C, το οποίο μετακινείται από το A στο B.

Άσκηση 3. - 23.60 YF . Μια μικρή σφαίρα μάζας 1,50 g κρέμεται από νήμα μεταξύ 2 παράλληλων κατακόρυφων πλακών που απέχουν 5 cm. Οι 2 πλάκες είναι μονωτικές και φέρουν ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα +σ και -σ. Η σφαίρα φέρει φορτίο $q = +8{,}90\ 10^{-6}$ C. Ποιά διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών απαιτείται ώστε να ισορροπήσει η σφαίρα και το νήμα να είναι σε γωνία 30° με την κατακόρυφο ;

Άσκηση 4. - 23.79 YF . Συνολικό ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος λεπτής ράβδου μήκους α. Θεωρήστε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μηδέν στο άπειρο. Βρείτε το δυναμικό στα ακόλουθα σημεία : α) σε σημείο P σε απόσταση x δεξιά από το δεξί άκρο της ράβδου και β) σε σημείο R σε απόσταση y πάνω από το δεξί άκρο της ράβδου. γ) Σε τι ανάγεται το αποτέλεσμα για τα σκέλη α) και β) για $|x|,|y| >> \alpha$;

Άσκηση 5. - 23.84 YF . Έστω το δυναμικό $V(\mathbf{r}) = A\,(x^2 - 3\,y^2 + z^2)$.

α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο **E** στο χώρο.

β) Έστω ότι το έργο για την κίνηση ενός φορτίου $q = +1{,}50\ 10^{-6}$ C από το σημείο α=(0,0,0.25 m) στο β=(0,0,0) είναι $W_{\alpha\beta} = 6{,}0\ 10^{-5}$ J. Υπολογίστε τη σταθερά A.

γ) Ποιά η συνιστώσα E_z στο σημείο α ;

δ) Να δείξετε ότι οι ισοδυναμικές γραμμές, δηλ. V(r) = σταθερό, σε καθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο (x,z), είναι "κύκλοι".

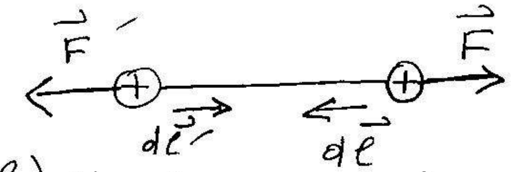
ε) Ποιά είναι η ακτίνα της ισοδυναμικής γραμμής V(r) = 1280 V και y=2 m ;

1. α) Η δύναμη Coulomb δρα μεταξύ των 2 πρωτονίων, και το έργο που επιτελεί είναι

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=r_1}^{r_2}$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = (1,60\cdot 10^{-19}C)^2\cdot 9\cdot 10^{9}\frac{Nm^2}{C^2}\,(\times)$$

$$(\times)\left(\frac{1}{3\cdot 10^{-15}m} - \frac{1}{2\cdot 10^{-10}m}\right) = 7,70\cdot 10^{-14}\,J,\ 1J = \text{Joule}$$



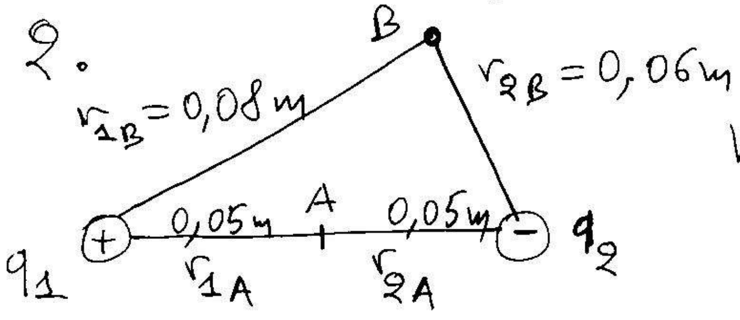
: $\vec{F} // -d\vec{\ell}$, $\vec{F} = -\vec{F}'$

β) Η δύναμη είναι διατηρητική, δηλ. διατηρείται η ολική ενέργεια $E = K + U$ = κινητική και δυναμική. Άρα: $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ οπότε $K_1 = U_2 - U_1 + K_2$. Έχουμε $K_2 = 0$ ($v = 0$ για τα 2 πρωτόνια) και $U_2 - U_1 = W_{12}$, ενώ

$$K_1 = m_a\frac{v_a^2}{2} + m_b\frac{v_b^2}{2} = 2\cdot\frac{mv^2}{2}$$, a, b τα 2 πρωτόνια.

Τελικά $mv^2 = W \Rightarrow v = \sqrt{\frac{W}{m}} = 6,78\cdot 10^{6}\, m/s$.
με $m = 1,67\cdot 10^{-27}\,kg$

2.



α) Το δυναμικό είναι

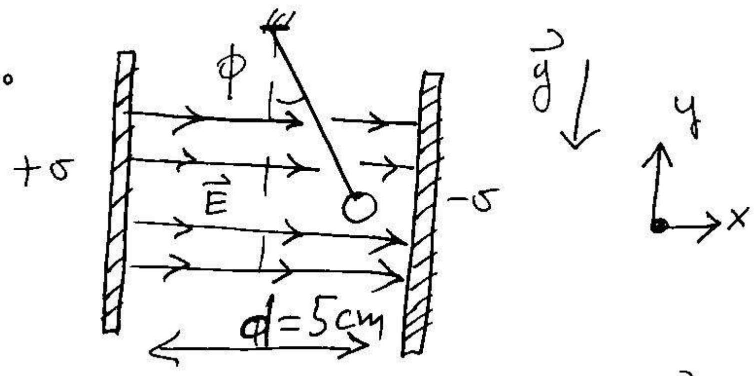
$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1A}} + \frac{q_2}{r_{2A}}\right) = -738\ \text{Volt}.$$

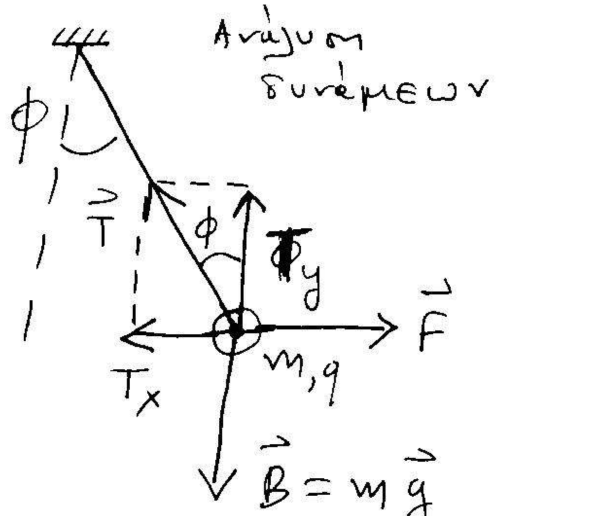
β) $V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1B}} + \frac{q_2}{r_{2B}}\right) = -705$ Volt.

γ) $W_{AB} = -q(V_A - V_B) = q(V_B - V_A) = 8{,}25\cdot 10^{-8}$ Joule

Υπενθύμιση: $1n = 10^{-9}$.

3.





Το νήμα ασκεί την τάση $\vec{T}$, η βαρύτητα το βάρος $\vec{B}$ και το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ την $\vec{F} = q\vec{E}$. Αφού η μάζα ισορροπεί, η συνολική δύναμη είναι μηδέν. Δηλ. $\sum_i \vec{F}_i = 0$

Στον άξονα x:

$$0 = \sum_i F_{ix} \Rightarrow T_x = F \Rightarrow T\sin\phi = qE \quad (1)$$

Στον άξονα y:

$$0 = \sum_i F_{iy} \Rightarrow T_y = B \Rightarrow T\cos\phi = mg \quad (2).$$

Διαιρούμε τις (1) & (2):

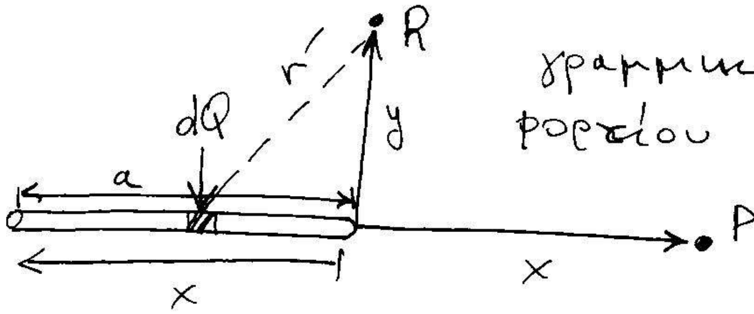
$$(1)/(2): \quad \frac{qE}{mg} = \tan\phi.$$

Έχουμε $g = 9{,}80\ \frac{m}{s^2}$, $\phi = 30^\circ$, $\tan\phi = 1/\sqrt{3}$

και επίσης

$$E = \Delta V/d \Rightarrow \Delta V = \frac{mgd}{q}\tan\phi = 47{,}7 \text{ Volt}$$

4.



γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = \frac{Q}{a} = \frac{dQ}{dx'} = \underline{\text{σταθερή}}$

(4)

α) $V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{\lambda\, dx'}{x+x'}$

$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\ln(x+x')\Big|_{x'=0}^{a} \Rightarrow V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$

β) $V_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dQ}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{\lambda\, dx'}{\sqrt{y^2+x'^2}}$

$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(x'+\sqrt{y^2+x'^2}\right)\Big|_{x'=0}^{a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\ln\left(\frac{a}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{a}{y}\right)^2}\right)$

γ) Έχουμε ότι $\ln(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \ldots,\ |b|<1$

Για το σημείο P και $a \ll |x|$ έχουμε

$\ln(1+a/x) = \frac{a}{x} + O\left(\frac{a^2}{x^2}\right)$. Άρα

$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$. Όμοια, για το R έχουμε

$\ln\left(a/y + \sqrt{1+(a/y)^2}\right) \simeq \ln\left(a/y + 1 + O(a/y)^2\right)$

[Θυμηθείτε $(1+b)^\mu = 1 + \mu b + \mu(\mu-1)\frac{b^2}{2} + O(b^3)$]
$|b| \ll 1$

$\simeq a/y + O(a^2/y^2)$. Τελικά:

$V_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y}$. Και στις 2 περιπτώσεις είναι το δυναμικό <u>σημειακού φορτίου</u>!

5. α) Έχουμε τη σχέση $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$. Έτσι
$E_x = -2xA$, $E_y = 6Ay$, $E_z = -2zA$.

β) Επειδή η δύναμη λόγω $\vec{E}$ είναι διατηρητική, έχω $W_{\alpha\beta} = U_a - U_\beta = q(V_{r=a} - V_{r=\beta})$

$= q \cdot A \cdot z_a^2 \Rightarrow A = \dfrac{W_{a\beta}}{q z_a^2} = \dfrac{6 \cdot 10^{-5} J}{1{,}50 \cdot 10^{-6} C \cdot (\underbrace{0{,}25 m}_{z_a})^2}$

$\Rightarrow A = 640 \dfrac{Volt}{m^2}$

[Άρα, $A \cdot r^2$ = Volt αν r^2 είναι σε m^2!]

Εναλλακτικά: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q \int_{z_a}^{z_\beta = 0} E_z dz$

$= q \int_{z_a}^{0} (-2zA)\, dz = q \cdot A \cdot z_a^2$

όπως και άνω!

γ) $E_z(r = a) = -2 \cdot 0{,}25 m \cdot 640 \dfrac{V}{m^2} = -320 \dfrac{Volt}{m}$

$E_x = E_y = 0$

δ) Έστω ότι $y = y_0$ και $V(r) = A(x^2 + z^2 - 3y_0^2) = V_0$, V_0 = σταθερά. Έτσι $x^2 + z^2 = V_0/A + 3y_0^2 = R^2$ = σταθερά. Αυτή ακριβώς είναι η εξίσωση "κύκλου" για τα x, z όπου $0 \le |x|, |z| \le R$.

ε) Η ακτίνα $R^2 = \dfrac{V_0}{A} + 3y_0^2$, $y_0 = 2m$

$\Rightarrow R = \sqrt{14}\, m = 3{,}74\, m$. $V_0 = 1280 V$