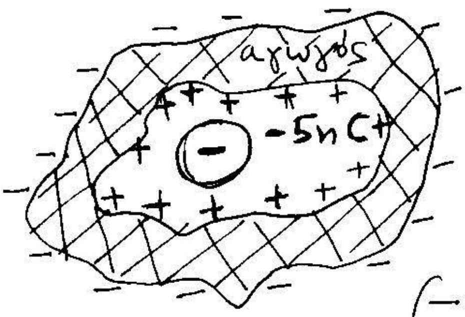
2η σειρά ασκήσεων – Νόμος του Gauss

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ : Οι αριθμοί “κεφάλαιο.αριθμός” των ασκήσεων αναφέρονται στο βιβλίο των **Young & Freedman (YF)** . Π.χ. 21.28 = κεφάλαιο 21, αριθμός 28.

Άσκηση 1. - 22.37 YF . Μια συμπαγής αγώγιμη σφαίρα ακτίνας , η οποία φέρει φορτίο Q>0, είναι ομόκεντρη με ένα πολύ λεπτό σφαιρικό μονωτικό φλοιό ακτίνας 2R, που φέρει επίσης φορτίο Q. Το Q κατανέμεται ομοιόμορφα σε ολόκληρο το φλοιό.
Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο **E** (μέτρο και διεύθυνση) σε κάθε μια από τις περιοχές $0 < r \leqslant R$, $R < r \leqslant 2R$ και $2R < r$. Κάνετε το γράφημα E(r).

Άσκηση 2. - 22.46 YF . Ένας πολύ μακρύς αγώγιμος σωλήνας (κοίλος κύλινδρος) έχει εσωτερική ακτίνα α και εξωτερική β. Ο σωλήνας φέρει φορτίο ανά μονάδα μήκους γ>0 , όπου γ είναι μια θετική σταθερά με μονάδες C/m. Κατά μήκος του άξονα του σωλήνα βρίσκεται ένα σύρμα επίσης με γραμμική πυκνότητα φορτίου γ.
α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο **E** ως συνάρτηση της γ και της απόστασης r από τον άξονα του σωλήνα για i) $r \leqslant \alpha$, ii) $\alpha < r \leqslant \beta$, iii) $\beta < r$, και κάνετε το γράφημα E(r).
β) Ποιό είναι το φορτίο του σωλήνα ανά μονάδα μήκους πάνω i) στην εσωτερική επιφάνεια r = α και ii) στην εξωτερική επιφάνεια r = β του σωλήνα;

Δείτε και το **σχετικό παράδειγμα 22.11**. Ο αγωγός, του οποίου η διατομή φαίνεται στο σχήμα, φέρει ολικό φορτίο +3 n C . Το φορτίο στο εσωτερικό της κοιλότητας, που είναι μονωμένο από τον αγωγό, είναι - 5 n C . Πόσο είναι το φορτίο σε κάθε επιφάνεια, εσωτερική και εξωτερική, του αγωγού;

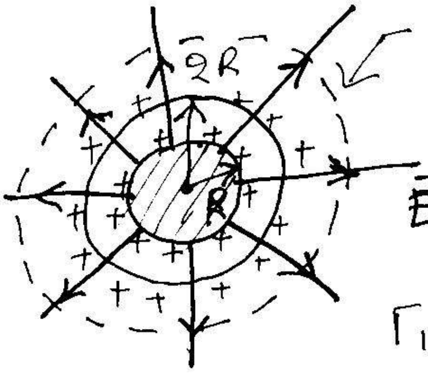


Αν το φορτίο στην κοιλότητα είναι $q = -5nC$, το φορτίο στην επιφάνεια της εσωτερικής κοιλότητας πρέπει να είναι $(-q) = +5nC$ (επάγεται από το q).
Ο αγωγός φέρει ολικό φορτίο $+3nC$, κανένα μέρος του οποίου <u>δεν</u> βρίσκεται στο εσωτερικό του. Αν $+5nC$ είναι στην εσωτερική επιφάνεια του αγωγού, τότε το εναπομένον φορτίο $(+3nC) - (+5nC) = -2nC$ βρίσκεται κατανεμημένο στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού.

Άσκηση 3. - 22.54 YF. Μια πλάκα μονωτικού υλικού έχει πάχος 2d και είναι προσανατολισμένη με τρόπιο ώστε οι πλευρές να είναι παράλληλες προς το επίπεδο (yz) και δίνονται από τα επίπεδα x = -d και x = d. Οι διαστάσεις είναι πολύ μεγάλες συγκριτικά με το πάχος και μπορούν να θεωρηθούν άπειρες. Η πλάκα έχει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο πυκνότητας ρ > 0.
α) Εξηγήστε γιατί το ηλεκτρικό πεδίο Ε, που οφείλεται στην πλάκα, είναι μηδέν στο κέντρο της πλάκας (x=0).
β) Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο **E** (μέτρο και διεύθυνση), που οφείλεται στην πλάκα, σε όλο το χώρο.

2η σειρά ασκήσεων – Λύσεις

1. 22.37



Γκαουσιανή επιφάνεια – σφαίρα με $r>2R$.

Για $r<R$ έχουμε $E=0$, διότι η σφαίρα είναι αγώγιμη.

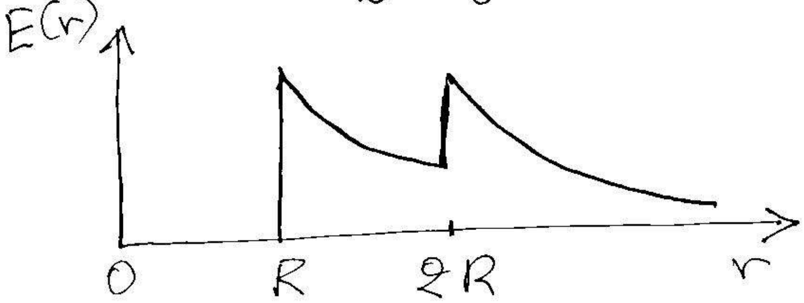
Για $r>R$ χρησιμοποιούμε σφαιρικές Γκαουσιανές επιφάνειες ακτίνας r. Η διεύθυνση του $\vec{E}$ είναι ακτινική προς τα έξω.

Για $R<r\leq 2R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E(r)\cdot 4\pi r^2$

$= Q_{\text{ολικό}}/\epsilon_0 = Q/\epsilon_0 \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}$

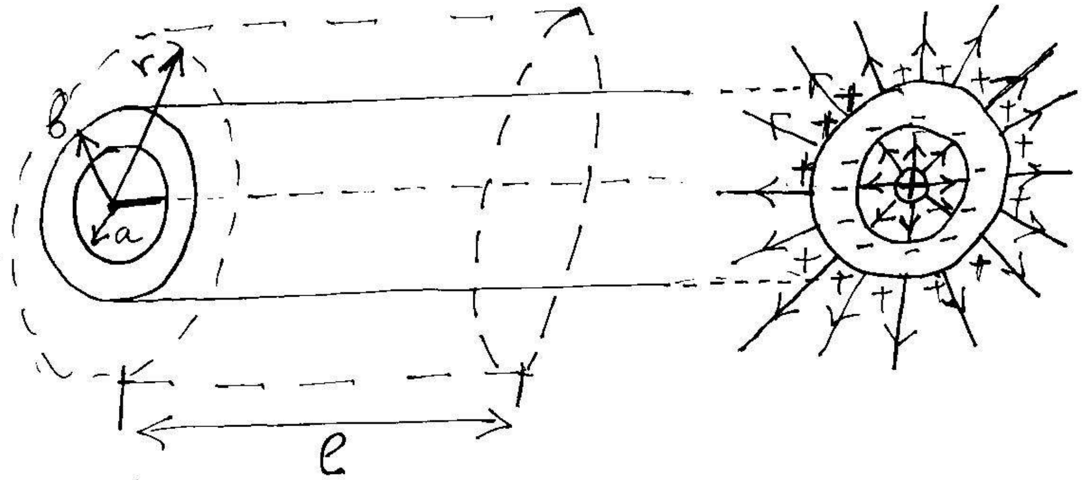
Για $r>2R$ έχουμε όμοια $E(r)\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{2Q}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow \vec{E} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}$



2. 22.46

Γκαουσιανή επιφάνεια – κύλινδρος – με $r>b$



Θεωρούμε και εδώ **Γκαουσιανές** επιφάνειες **κυλινδρικού σχήματος** και ανάλογης ακτίνας r.

i) Για $r \le a$ έχουμε $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E(r)\cdot 2\pi r \ell$

$$= \frac{\Phi_{ολικό}}{\epsilon_0} = \gamma \cdot \ell / \epsilon_0 \Rightarrow E(r) = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r}$$

από τον άξονα του κυλίνδρου

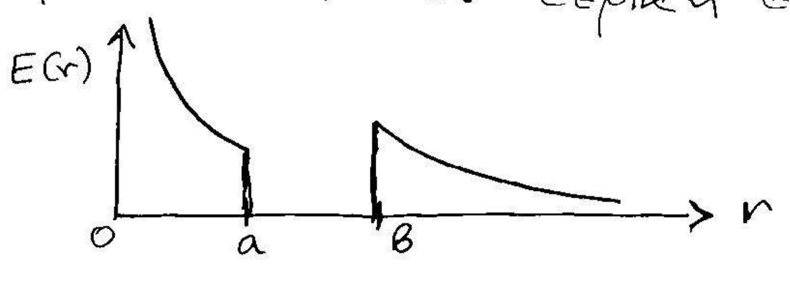
ii) $E(r)=0$ για $a<r\le b$ – είναι η περιοχή του αγωγού.

iii) $b<r$: $E(r)\cdot 2\pi r\ell = 2\gamma \ell/\epsilon_0$

Εδώ $2\gamma = \gamma$ (από τον άξονα) $+\ \gamma$ (από τον κύλινδρο – βλ. σκέλος (β)) $\Rightarrow E(r) = \gamma/\pi\epsilon_0 r$.

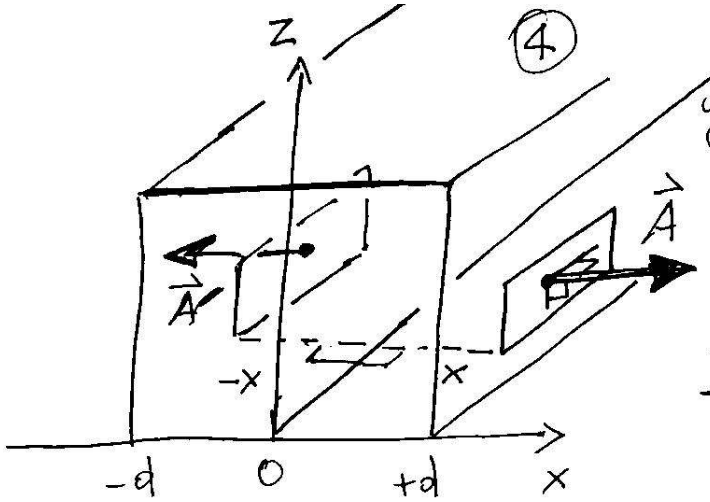
β) i) $E(r)=0$ για $a<r<b$ – είναι αγωγός.
Από το νόμο του Gauss έπεται ότι το συνολικό περικλειόμενο φορτίο πρέπει να είναι μηδέν. Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν επάγεται συνολική γραμμική πυκνότητα φορτίου $-\gamma$ στην εσωτερική επιφάνεια $r=a$.

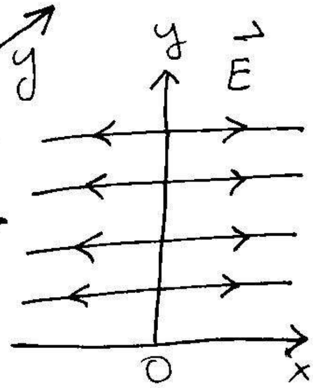
ii) Η συνολική πυκνότητα φορτίου του αγωγού είναι $\rho = \rho(r=a) + \rho(r=b)$
$= -\gamma + \rho(r=b) = \gamma \Rightarrow \rho(r=b) = 2\gamma$
είναι η συνολική γραμμική πυκνότητα φορτίου στην εξωτερική επιφάνεια $r=b$.



3. 22.54

Συγκρίνετε με το πρόβλημα του άπειρου φορτισμένου επιπέδου που είδαμε επίσης στην τάξη!





Εδώ το $\vec{E} = E_x \hat{x}$, δηλ. <u>δεν</u> έχει συνιστώσες E_y, E_z λόγω συμμετρίας του προβλήματος. Επίσης, η Γκαουσιανή κλειστή επιφάνεια εδώ πρέπει να έχει 2 πλευρές $A(x)$ και $A'(-x)$, παράλληλες προς το επίπεδο (y,z) και σε αποστάσεις $\pm x$.

Όπως φαίνεται στο δεξί σχήμα, το $\vec{E}$ έχει θετική φορά για $x>0$ και αρνητική για $x<0$.

Έτσι το κάθετο διάνυσμα $\vec{A}$ στις 2 επιφάνειες A, A' είναι παράλληλο με το $\vec{E}$, ενώ κάθε άλλη συνεισφορά από τις πλαϊνές επιφάνειες της Γκαουσιανής επιφάνειας είναι μηδενική (συμμετρία, $E_y = E_z = 0$).

a) Αφού το $\vec{E}$ αλλάζει φορά για $x=0$, αναγκαστικά $E(x=0)=0$. Περιττή συνάρτηση του x.

b) Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss έχουμε

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 2\cdot E(x)\cdot A = \frac{Q_{ολικό}}{\epsilon_0} = 2\cdot\rho\cdot A\, x/\epsilon_0$$

$$\Rightarrow E(x) = \rho x/\epsilon_0, \quad |x|\le d.$$ Όμοια για $|x|>d$

$$2E(x)A = 2\rho A d \Rightarrow E(x) = s\cdot \rho d/\epsilon_0 = s\cdot E_0$$

Εδώ $s(x>0)=+1$

$s(x<0)=-1$