1η σειρά ασκήσεων - Ηλεκτρικό Πεδίο και Φορτίο

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ : Οι αριθμοί "κεφάλαιο.αριθμός" των ασκήσεων αναφέρονται στο βιβλίο των **Young & Freedman (YF)** . Π.χ. 21.28 = κεφάλαιο 21, αριθμός 28.

Άσκηση 1. Ένα πρωτόνιο p κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0=4,5 10^{6} m/s κατά τον άξονα x.
α) Βρείτε το **απλούστερο** ηλεκτρικό πεδίο **E** – δηλαδή μέτρο και διεύθυνση – εξαιτίας του οποίου θα ακινητοποιηθεί ομαλά το p σε απόσταση s=3.2 cm. Το φορτίο του p είναι q= 1,6 10^{-19} C .
β) Σε πόσο χρόνο θα συμβεί αυτό;
γ) Επαναλάβετε τα σκέλη α) και β) για ένα ηλεκτρόνιο e που κινείται με την ίδια ταχύτητα v_0.

Άσκηση 2. - 21.28 YF . α) Ποιό είναι το ηλεκτρικό πεδίο **E** ενός πυρήνα σιδήρου Fe σε απόσταση 6 10^{-10} m ; Ο πυρήνας Fe θεωρείται σημειακό φορτίο και έχει ατομικό αριθμό (=αριθμός πρωτονίων) Z=26.
β) Ποιό είναι το ηλεκτρικό πεδίο **E** ενός πρωτονίου σε απόσταση 5,29 10^{-11} m από αυτό; (Αυτή είναι η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου στο μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου.)

Άσκηση 3. - 21.31 YF. Ένα ηλεκτρόνιο e εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα v_0=1.6 10^{6} m/s κατά τον άξονα x μέσα σε ομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο **E** μεταξύ παραλλήλων πλακών (με φορά προς τα κάτω). Το πεδίο έξω από τις πλάκες είναι μηδενικό. Το ηλεκτρόνιο e εισέρχεται στο πεδίο σε σημείο ακριβώς στο ενδιάμεσο μεταξύ των δύο πλακών (βλ. σχήμα).
α) Εάν εξερχόμενο από το πεδίο E το e μόλις που δεν αγγίζει την πάνω πλάκα, βρείτε το E (μέτρο).
β) Εαν υποθέσουμε ότι το e στο σχήμα αντικαθίσταται από ένα πρωτόνιο p με την ίδια αρχική v_0, θα κτυπήσει κάποια από τις πλάκες; Βρείτε την τροχιά του.
γ) Συγκρίνετε τις τροχιές των δύο σωματίων και εξηγήστε τις διαφορές.
δ) Είναι λογικό να αγνοήσουμε την επίδραση της βαρύτητας και γιατί;

Άσκηση 4. - 21.50 YF. Ένας αγωγός σε σχήμα δακτυλίου με ακτίνα a=2,5 cm έχει συνολικό θετικό φορτίο Q=+0.125 n C ομοιόμορφα κατανεμημένο πάνω του. Το κέντρο του δακτυλίου βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (βλ. σχήμα).
α) Ποιό είναι το ηλεκτρικό πεδίο **E** (μέτρο και διεύθυνση) στο σημείο P με x=40 cm, y=z=0 ;
β) Ένα σημειακό φορτίο q= -2,5 10^{-6} C τοποθετείται στο σημείο P. Ποιό είναι το μέτρο και η διεύθυνση της δύναμης που ασκείται από το φορτίο στο δακτύλιο;

Άσκηση 5. - 21.93 YF. Θετικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιογενώς κατά μήκος του άξονα x από το x=0 μέχρι το x=a. Αρνητικό φορτίο – Q κατανέμεται ομοιογενώς κατά μήκος του άξονα από το x=0 μέχρι το x= - a.
α) Ένα θετικό σημειακό φορτίο q τοποθετείται στο θετικό άξονα y σε απόσταση y από την αρχή των αξόνων. Βρείτε τη δύναμη (μέτρο και διεύθυνση) που ασκούν συνολικά οι 2 κατανομές στο
Δείξτε ότι αυτή η δύναμη είναι ανάλογη του y^{-3} για y>>a.
β) Τώρα υποθέστε ότι το θετικό φορτίο q βρίσκεται στο θετικό άξονα x σε απόσταση x>a από την αρχή. Βρείτε τη δύναμη (μέτρο και διεύθυνση) που ασκούν συνολικά οι 2 κατανομές στο
Δείξτε ότι αυτή η δύναμη είναι ανάλογη του x^{-3} για x>>a.
Συγκρίνετε με τη δύναμη από το πεδίο του διπόλου που είδαμε στην τάξη !

Λύσεις - $1^{η}$ σειρά ασκήσεων

1. α) Το ζητούμενο απλούστερο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι σταθερό και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{E} = m\vec{a}/q = E\hat{x}$$

όπου F η δύναμη επί του πρωτονίου (p), $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg η μάζα του, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a\hat{x}$ η επιτάχυνσή του, που είναι σταθερή

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{τελ.} - v_{αρχ.}}{t - 0} = -\frac{v_0}{t}.$$

Λόγω της σταθερής a, το ολικό διάστημα που διανύει το p είναι

$$s(t) = v_{αρχ} \cdot t + a\frac{t^2}{2} = v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2t} = \frac{v_0 t}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{t = 2s/v_0}.$$ Έτσι $a = -\frac{v_0^2}{2s}$ και το πεδίο

$$E = -\frac{v_0^2 m}{2qs} = -\frac{(4.5 \cdot 10^6)\,m^2/s^2 \cdot (1,67)\,10^{-27}\,kg}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 3,2 \cdot 10^{-2}\,m}$$

$$= -3.30 \cdot 10^6\ N/C$$ ← ΠΡΟΣΟΧΗ στο πρόσημο "−"!

[$K = \frac{m v_0^2}{2}$ είναι η αρχική κινητική ενέργεια.]

β) $$t = \frac{2 \cdot 3,2\ 10^{-2}\,m}{4.5 \cdot 10^6\,m/s} = 1,42 \cdot 10^{-8}\,s$$

γ) Εδώ αλλάζει η μάζα σε $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg και το πρόσημο του φορτίου σε αρνητικό:

$$E = -\frac{v_0^2 m_e}{2(-q)s} = +1,80 \cdot 10^3\ N/C.$$

Εδώ το πεδίο έχει θετικό πρόσημο και είναι 3 τάξεις μεγέθους μικρότερο, διότι $m_e = m/1840$.

2) α) Το συνολικό φορτίο του πυρήνα είναι

$Q = Z \cdot q = 26 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C$, q = φορτίο πρωτονίου

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{26 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C}{(6 \cdot 10^{-10})^2 m^2}$$

$$= 1.04 \cdot 10^{11} N/C$$

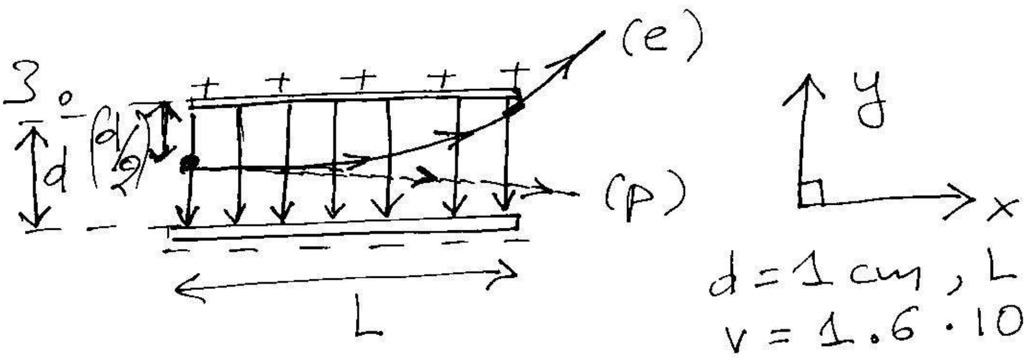
β) εδώ $Q = q$ – το υδρογόνο H έχει 1 πρωτόνιο στον πυρήνα του

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{1.6 \cdot 10^{-19} C}{(5.29 \cdot 10^{-11})^2 m^2}$$

$$= 5.14 \cdot 10^{11} N/C$$

Αυτά τα πεδία E είναι τεράστια!

3)



$q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} C$

$d = 1\,cm$, $L = 2\,cm$

$v_0 = 1.6 \cdot 10^6 m/s$

α) Στη διεύθυνση x έχουμε ομαλή ευθύγραμμη κίνηση $x = v_0 t = L \Rightarrow t = L/v_0$.

Στη διεύθυνση y έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με a_y = σταθερή: $F_y = m a_y = |q_e| E$

$\Rightarrow a_y = |q_e| E/m$ και εδώ $\underline{\underline{y = a_y \frac{t^2}{2} = d/2}}$

$\Rightarrow a_y = d/t^2$. Άρα

$$E = m a_y / |q_e| = \frac{m d}{|q_e|} \frac{v_0^2}{L^2}$$

$$= 364\ N/C$$

γ) Όχι, η απόκλιση του p κατά τον άξονα y είναι πολύ μικρότερη - λόγω της μεγαλύτερης κατά 1840 φορές μάζας του - και αντίθετου προσήμου. Δίνεται από $(q=-q_e)$

$$y = \frac{a_y t^2}{2} = \left(\frac{qE}{m_p}\right)\cdot\left(\frac{L}{v_0}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1.6\cdot10^{-19}C}{1.67\cdot10^{-27}kg}\; 364\frac{N}{C}\left(\frac{2\cdot10^{-2}m}{1.6\cdot10^{6}m/s}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 2.72\ \mu m\ ,\quad 1\mu = 10^{-6}$$

δ) Ναι, είναι πολύ ασθενής σχετικά με το E.

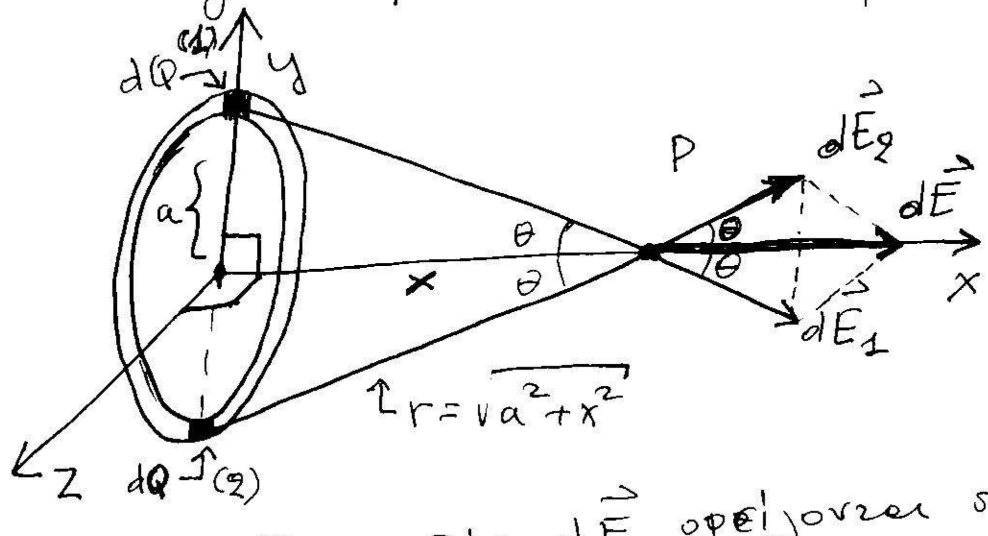
Δημιουργεί ένα ~~ισο~~δύναμο πεδίο E_g

$$F_g = m_p g = qE_g \Rightarrow E_g = \frac{m_p g}{q} = \frac{1.67\cdot10^{-27}kg\cdot 9.80\frac{m}{s^2}}{1.6\cdot10^{-19}C}$$

$$\Rightarrow E_g = 1.02\cdot10^{-8}\frac{N}{C}$$

Όμοια $F_g \ll q\cdot E \leftarrow E$ του μέρους α).

4.



Τα στοιχειώδη πεδία $d\vec{E}$ οφείλονται στα στοιχειώδη φορτία dQ του δακτυλίου. Δείτε ότι θεωρώντας αντιδιαμετρικά ζεύγη φορτίων dQ, ΜΟΝΟ οι συνιστώσες dE_x παραμένουν!

Είναι $dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ και $dE_x = dE \cdot \cos\theta$,

όπου $\cos\theta = x/r = x/\sqrt{a^2+x^2}$.

Έτσι $E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{x \cdot dQ}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{Q \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: έχουμε δεδομένο σταθερό x εδώ, οπότε η ολοκλήρωση $\int dE_x$ αναφέρεται απλώς στο στοιχειώδες φορτίο dQ κατά μήκος του δακτυλίου.

Τελικά $\vec{E} = E_x \hat{x}$.

Φυσικά το **E** έχει διαστάσεις μήκους $\frac{x}{(x^2)^{3/2}} = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(\text{μήκος})^2}$ όπως αναμενόταν!

Επίσης, για $\underline{\underline{x \gg a}}$ έχω

$E_x \simeq \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 x^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$, δηλ. ο δακτύλιος φαίνεται σαν $\underline{\underline{\text{σημειακό φορτίο}}}$ Q.

a) Για $x = 40$ cm, $Q = 0{,}125$ nC, $a = 2.5$ cm

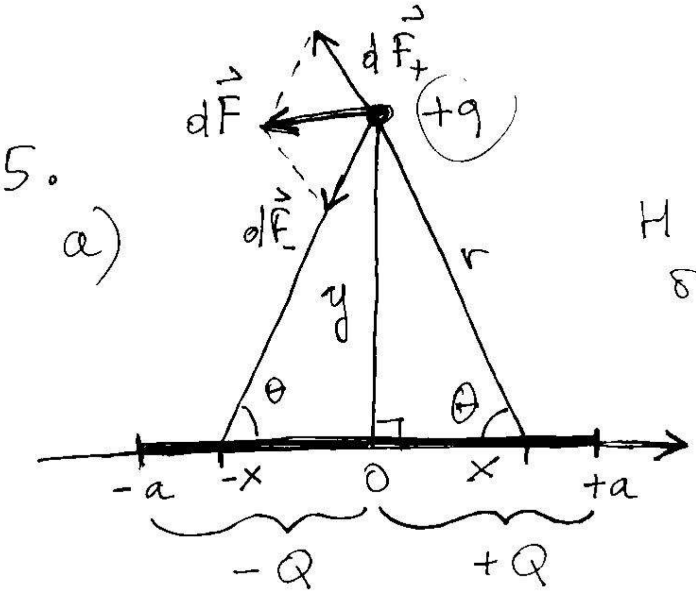
$E = \frac{9 \cdot 10^9}{2} \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{0.4 \cdot 0.125 \cdot 10^{-9} C}{(0.4^2 + (0.025)^2)^{3/2} m^2} =$

$= 7.00 \frac{N}{C}$

β) $\vec{F} = q\vec{E} = F_x \hat{x}$ όπου

$F_x = qE_x = -2.5\cdot 10^{-6}\cdot 7N = -1.75\cdot 10^{-5} N.$

5. α)



$d\vec{F} = d\vec{F}_+ + d\vec{F}_- = dF_x \hat{x}$

Η συνολική στοιχειώδης δύναμη έχει __μόνο__ συνιστώσα x.

Επίσης $dF_i = q\dfrac{dQ_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$

$\boxed{dQ_i = \lambda_i dx}$

Συνολικά $dF_x = -2\cdot dF\cdot\cos\theta$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Η πυκνότητα φορτίου είναι $\lambda = Q/a$ μεταξύ $x=0 \to a$ και $-\lambda$ μεταξύ $x=-a \to 0$.
$= (-Q/a)$

Έχουμε

$$dF_x = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,dQ}{r^2}\cos\theta = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\cdot x\cdot dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow F_x = \int dF_x = -\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{dx\cdot x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{x=0}^{a}$$

ΚΑΙ

$$\vec{F} = F_x\hat{x},\quad F_x = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{1}{y}\right).$$

Με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος

$(1+x)^b = 1 + bx + \dfrac{b(b-1)}{2}x^2 + O(x^3)$, $|x| \ll 1$,

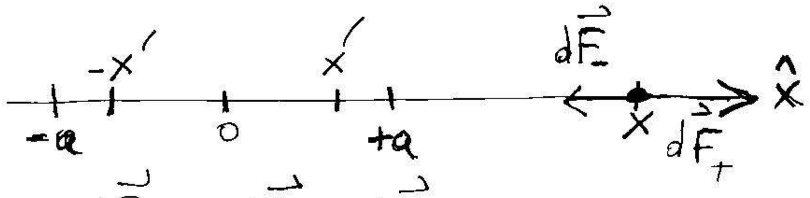
έχουμε $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} = \dfrac{1}{y}\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{y}\right)^2 + O\left(\dfrac{a}{y}\right)^4\right)$

και η F_x για $\underline{\underline{y>>a}}$ γίνεται

$$F_x \simeq \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{a}{y^3},$$ δηλ. έχει τη μορφή

που έχουμε για ένα ηλεκτρικό δίπολο. Όπως αναμενόταν, διότι η κατανομή φορτίου στο πρόβλημα είναι ακριβώς ενός διπόλου - για $y>>a$ είναι ισοδύναμη με φορτίο $+Q$ στο $x=a/2$ και φορτίο $-Q$ στο $x=-a/2$.

β)



Εδώ $d\vec{F} = d\vec{F}_+ + d\vec{F}_- = dF\,\hat{x}$, $dF = dF_+ - dF_-$
και

$$dF = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{dQ}{r_+^2} - \frac{dQ}{r_-^2}\right) = \frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{dx'}{(x-x')^2} - \frac{dx'}{(x+x')^2}\right)$$

$$\Rightarrow F = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left\{\int_0^a dx'\left[\frac{1}{(x-x')^2} - \frac{1}{(x+x')^2}\right] = \frac{1}{x-x'}\Big|_{x=0}^{a} + \frac{1}{x+x'}\Big|_{x=0}^{a}\right\}$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} - \frac{2}{x}\right)$$

Με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος

$$(1 \pm a/x)^{-1} = 1 \mp a/x + a^2/x^2 + O(a/x)^3, \quad \underline{\underline{|x| >> a}}$$

Παίρνουμε

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x}\left[\cancel{1} - \cancel{\frac{a}{x}} + \frac{a^2}{x^2} + \cancel{1} + \cancel{\frac{a}{x}} + \frac{a^2}{x^2}\right] - \cancel{2/x} + \frac{1}{x}O(a^3/x^3)$$

και τελικά

$$F \simeq \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\,a/x^3$$ — όπως στο α).