MEM-274 – Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

(Φυλλάδιο 2: Ασυμπτωτικά αναπτύγματα ολοκληρωμάτων)

1. Με ολοκήρωση κατά μέρη, βρείτε τον πρώτο όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των παρακάτω ολοκληρωμάτων:

$$\int_0^\lambda \frac{e^{-t}\,dt}{\lambda+t}\ , \qquad \lambda\to\infty\ ,$$

$$\int_\lambda^\infty e^{-at^b}dt, \quad a,b>0\ , \qquad \lambda\to\infty\ .$$

2. Βρείτε τους 2 πρώτους όρους στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των παρακάτω ολοκληρωμάτων καθώς $\varepsilon\to 0^+$:

$$\int_\varepsilon^1 \cos(\varepsilon t)dt\ , \qquad \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t^2}dt\ , \qquad \int_0^1 \frac{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}}{1+t^2}dt\ .$$

3. Με την μέθοδο Laplace βρείτε τον πρώτο όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των παρακάτω ολοκληρωμάτων:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(t)\, e^{\lambda(t-e^t)}dt\ , \qquad \lambda\to\infty\ ,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\lambda\cos t}}{1+t^2}dt\ , \qquad \lambda\to\infty\ .$$

4. Δείξτε οτι

$$I(\lambda)=\int_0^1 \frac{e^\lambda-e^{\lambda t}}{1-t}dt \sim e^\lambda\ln\lambda\ , \qquad \lambda\to\infty\ .$$

(Υποδ. Δείξτε πρώτα οτι

$$I(\lambda)=e^\lambda\int_0^\lambda \frac{1-e^{-t}}{t}dt\ .$$

Στη συνέχεια ολοκληρώστε κατά μέρη.)