MEM-274 – Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

(Φυλλάδιο 4: Επαναληπτικές ασκήσεις)

1. Δίδεται το συναρτησιακό

$$J[y] = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} (y^2 - (y')^2)dx, \qquad y \in A := \{y \in C^2[0, \frac{5\pi}{4}], \quad y(0) = y(\frac{5\pi}{4}) = 0\} \ .$$

(α) Βρείτε την Euler Lagrange.

(β) Βρείτε την λύση της Euler Lagrange, έστω $y_0(x)$. (απ. $y_0(x) = 0$)

Για την συνεχή συνάρτηση f ορίζω την νόρμα $\|f\|_0 := \max_{x\in[0,\frac{5\pi}{4}]} |f(x)|$.

(γ) Έστω η οικογένεια συναρτήσεων

$$y_{1n}(x) = \frac{1}{n^2}\sin(\frac{4}{5}nx) \ , \qquad n = 1, 2 \ldots .$$

Δείξτε οτι για κάθε ε θετικό υπάρχει n_0 τ.ω.

$$\|y_{1n} - y_0\|_0 < \varepsilon, \qquad \forall \ n \geq n_0 \ .$$

(δ) Δείξτε οτι

$$J[y_{1n}] = \frac{5\pi}{8n^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{16}{25}\right) \ .$$

Λέμε οτι το συναρτησιακό $J[y]$ παρουσιάζει *τοπικό ελάχιστο* στην συνάρτηση $\bar{y} \in A$ (με την νόρμα $\|\cdot\|_0$) αν υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$$J[y] \geq J[\bar{y}], \qquad \forall y \in A, \quad \|y - \bar{y}\| \leq \delta \ .$$

Αντίστοιχα ορίζεται και το *τοπικό μέγιστο.*

(ε) Έστω η οικογένεια συναρτήσεων

$$y_{2n}(x) = \frac{1}{n}\sin(\frac{4}{5}x) \ , \qquad n = 1, 2 \ldots .$$

Δείξτε οτι

$$J[y_{2n}] = \frac{9\pi}{40n^2} \ .$$

(στ) Δείξτε οτι η y_0 δεν ειναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο για το συναρτησιακό $J[y], \quad y \in A$.

2. Δίδεται το συναρτησιακό

$$J[y]=\int_0^1 e^x(y^2+\frac{1}{2}(y')^2)dx, \qquad y\in A:=\{y\in C^2[0,1], \quad y(0)=1, \quad y(1)=e\}\ .$$

(α) Βρείτε την Euler Lagrange.

(β) Βρείτε την λύση της Euler Lagrange, έστω $y_0(x)$. (απ. $y_0(x)=e^x$).

(γ) Αν $h\in C^2[0,1]$ με $h(0)=h(1)=0$, δείξτε οτι

$$J[y_0+h]-J[y_0]=\int_0^1 e^x(h^2+\frac{1}{2}h'^2)dx\ .$$

(δ) Δείξτε οτι για την y_0, το συναρτησιακό $J[y], \quad y\in A$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

3. Ασκήσεις 4.16, 4.17 στη σελίδα 157 του βιβλίου.

4. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\varepsilon y''+(2x^2+x+1)y'=4x+1, \qquad y(0)=\alpha, \qquad y(1)=\beta, \quad 0<\varepsilon<<1\ ,$$

παρουσιάζει οριακό στρώμα κοντα στο $x=0$. Βρείτε μια ομοιόμορφη προσέγγιση της λύσης.

5. Δίδεται η αλγεβρική εξίσωση:

$$\varepsilon e^{y^2}=y\ , \qquad 0<\varepsilon<<1\ .$$

(α) Δείξτε οτι έχει δυο λύσεις. Η μία τείνει στο μηδέν και η άλλη στο άπειρο καθώς $\varepsilon\to 0$.

(β) Βρείτε ασυμπτωτική προσέγγιση της λύσης που τείνει στο μηδέν μέχρι τάξης $O(\varepsilon^7)$.

Στη συνέχεια θα βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης που τείνει στο άπειρο.

(γ) Με εξισορρόπηση τάξεων δείξτε οτι

$$y(\varepsilon)\sim\left(\ln(\frac{1}{\varepsilon})\right)^{\frac{1}{2}}\ , \qquad \varepsilon\to 0\ .$$

(δ) Για να βρούμε τον επόμενο όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα γράφουμε

$$y(\varepsilon)=\left(\ln(\frac{1}{\varepsilon})\right)^{\frac{1}{2}}(1+z(\varepsilon)), \qquad z(\varepsilon)=o(1)\ .$$

Με εξισορρόπηση τάξεων δείξτε οτι

$$z(\varepsilon)\sim\frac{1}{4}\frac{\ln\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}\ .$$