MEM-274 – Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

(Φυλλάδιο 1: για WKB)

1. Δίδεται η εξίσωση για την $y = y(t)$,

$$\varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0, \qquad 0 < t < 1, \quad 0 < \varepsilon << 1,$$
$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 1 \ .$$

(α) Βρείτε την ακριβή λύση $y_{ex}(t)$. Παρατηρήστε οτι παρουσιάζει οριακό στρώμα κοντά στο $t = 0$.

(β) Λύστε το πρόβλημα με την μέθοδο του οριακού στρώματος. Δηλ. βρείτε εξωτερική προσέγγιση, εσωτερική προσέγγιση και τέλος την ομοιόμορφη προσέγγιση $y_{comp}(t)$ στο $(0, 1)$.

Στη συνέχεια θα λύσουμε το πρόβλημα με την μέθοδο WKB. Υποθέτουμε οτι η λύση είναι της μορφής

$$y(t) = e^{\frac{\theta(t)}{\varepsilon^\alpha}}(y_0(t) + \varepsilon^\alpha y_1(t) + \ldots), \qquad \alpha > 0 \ .$$

(γ) Με εξισορρόπηση τάξεων καταλήξτε στην επιλογή $\alpha = 1$.

(δ) Βρείτε και λύστε τις έξισώσεις για τις συναρτήσεις θ και y_0.

(ε) Γράψτε την WKB λύση $y_{WKB}(t)$ του προβλήματος.

(στ) Συγκρίνετε τις 3 λύσεις $y_{ex}(t)$, $y_{comp}(t)$ και $y_{WKB}(t)$.

2. Δίδεται η εξίσωση

$$\varepsilon^2 y'' - k^2(x, \varepsilon) y = 0, \qquad x > 0 \ ,$$

όπου υποθέτουμε οτι $k^2(x, \varepsilon) = k_0^2(x) + \varepsilon k_1^2(x) + ...$ με $k_0(x), k_1(x) > 0$. Επαναλάβετε την διαδικασία που κάναμε στο μάθημα και δείξτε οτι

$$y_{WKB}(t) = k_0^{-\frac{1}{2}}(x)\left(c_1 e^{\frac{-g(x,\varepsilon)}{\varepsilon}} + c_2 e^{\frac{g(x,\varepsilon)}{\varepsilon}}\right) \ ,$$

όπου

$$g(x, \varepsilon) = \int_a^x k_0(s)\left[1 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{k_1^2(s)}{k_0^2(s)}\right] ds \ .$$

Στην παραπάνω προσέγγιση θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε την $g(x, \varepsilon)$ με την $G(x, \varepsilon) = \int_a^x k(s, \varepsilon) ds$;