MEM-274 – Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

(Φυλλάδιο 3: Λογισμός Μεταβολών)

1. Η συνεχής στο $[0,1]$ συνάρτηση f είναι τέτοια ωστε

   (1) $$\int_0^1 f(x)\phi''(x)dx = 0\ ,$$

   για κάθε συνάρτηση ελέγχου $\phi \in C^2[0,1]$ τ.ω. $\phi(0) = \phi(1) = \phi'(0) = \phi'(1) = 0$. Θα δείξουμε οτι

   (2) $$f(x) = c_0 + c_1 x\ ,$$

   όπου c_0, c_1 σταθερές.

   α) Δείξτε την (2) υποθέτοντας οτι η f είναι $C^2[0,1]$.

   β) Ορίζουμε την συνάρτηση

   $$\phi_0(x) = \int_0^x \int_0^y (f(z) - c_0 - c_1 z)dzdy\ .$$

   Παρατηρήστε οτι $\phi_0 \in C^2[0,1]$ με $\phi_0(0) = \phi_0'(0) = 0$. Δείξτε οτι

   $$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \int_0^x (x-z)f(z)dz - \frac{1}{2}c_0 x^2 - \frac{1}{6}c_1 x^3\ , \\ \phi_0'(x) &= \int_0^x f(z)dz - c_0 x - \frac{1}{2}c_1 x^2\ . \end{aligned}$$

   γ) Βρείτε σταθερές c_0, c_1 τ.ω $\phi_0(1) = \phi_0'(1) = 0$.

   δ) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα την $\phi_0(x)$ ως συνάρτηση ελέγχου δείξτε τη (2).