

MEM-274 – Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τελικό διαγώνισμα – Ιούνιος 2016

1. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\varepsilon y'' + (1+x)^2 y' + y^2 = 0, \quad y(0) = y(1) = 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

παρουσιάζει οριακό στρώμα στο $x = 0$. Βρείτε ομοιόμορφη προσέγγιση της λύσης.

2. Δίδεται το συναρτησιακό

$$I[y] = \int_0^b (\sqrt{1 - k^2 + y'^2} - ky') dx,$$

με $y(0) = 0$ και $y(b)$ ελεύθερο. Η σταθερά k ικανοποιεί $0 < k < 1$.

(α) Βρείτε την Euler Lagrange.

(β) Ποιά είναι η φυσική συνοριακή συνθήκη στο άκρο $x = b$;

(γ) Βρείτε τα ακρότατα του συναρτησιακού.

3. Βρείτε τούς 2 πρώτους όρους στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_1^\lambda e^{t^2} dt, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

4. Δίδεται το συναρτησιακό

$$J[y] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y \in A := \{y \in C^2[1, 2], \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 5\}.$$

(α) Βρείτε την Euler Lagrange.

(β) Βρείτε την λύση της Euler Lagrange, έστω $y_0(x)$.

(γ) Αν $h \in C^2[1, 2]$ με $h(1) = h(2) = 0$, υπολογίστε τη διαφορά

$$J[y_0 + h] - J[y_0].$$

(δ) Δείξτε ότι για την y_0 , το συναρτησιακό $J[y]$, $y \in A$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

Διάρκεια: 2 ώρες