ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 25 Απριλίου 2024

Σ. Φίλιππας

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Φυλλάδιο 11

1). (α) Δείξτε ότι

$$u[y^2u_{xx} + x^2u_{yy}] = div(y^2uu_x,\ x^2uu_y) - [(yu_x)^2 + (xu_y)^2].$$

(β) Έστω χωρίο $U \subset \mathbf{R}^2$ με ομαλό σύνορο που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο. Δείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων για την εξίσωση

$$\begin{aligned} (y^2u_x)_x + (x^2u_y)_y &= F(x,y), \qquad (x.y) \in U \\ u(x,y) &= g(x,y), \qquad (x,y) \in \partial U. \end{aligned}$$

2). Η συνάρτηση $v = v(x,y)$, $v \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$, όπου $U \subset \mathbf{R}^2$ φραγμένο χωρίο ικανοποιεί

$$\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} &= -2, \qquad (x,y) \in U \\ v(x,y) &= 0, \qquad (x,y) \in \partial U. \end{aligned}$$

Δείξτε οτι η ποσότητα $|\nabla v|^2$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο ∂U.

3). Έστω φραγμένο χωρίο $U \subset \mathbf{R}^2$ με ομαλό σύνορο, $\mathbf{x} = (x,y)$ και

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} &= \lambda u, \qquad \mathbf{x} \in U \\ u(x,y) &= 0, \qquad \mathbf{x} \in \partial U. \end{aligned}$$

Δείξτε οτι αν το παραπάνω πρόβλημα έχει μη τετριμμένη λύση $u \not\equiv 0$, τότε $\lambda > 0$.

4). Στον δίσκο ακτίνας a, λύστε την εξίσωση

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 \qquad x \in D_a \\ \frac{\partial w}{\partial r} - \gamma w &= f(\theta), \qquad r = a, \end{aligned}$$

όπου $f(\theta)$ τυχαία ομαλή συνάρτηση. Γράψτε τη λύση χρησιμοποιώντας τους συντελεστές Fourier της $f(\theta)$.

5). Λύστε το παρακάτω πρόβλημα Dirichlet στο εξωτερικό του δίσκου ακτίνας a,

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y) &= 0, \qquad x^2+y^2>a, \\ u(x,y) &= g(\theta), \qquad x^2+y^2=a, \\ u(x,y) \ \text{φραγμένο}, &\qquad \text{καθώς} \ \ x^2+y^2\to\infty. \end{aligned}$$

6). Έστω φραγμένο χωρίο $U\subset\mathbf{R}^2$ με ομαλό σύνορο και $u\in C^2(\bar U)$ που ικανοποιεί ($\mathbf{x}=(x,y)$),

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \qquad \mathbf{x}\in U, \\ u &= g, \qquad \mathbf{x}\in\partial U. \end{aligned}$$

Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά C_U που εξαρτάται μόνο από το U τ.ω.

$$\max_{x\in\bar U}|u|\le C_U(\max_{x\in\partial U}|g|+\max_{x\in\bar U}|f|). \tag{1}$$

(i) Έστω $L=\max_{x\in\bar U}|f|$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τη βοηθητική συνάρτηση $v(\mathbf{x})=u(\mathbf{x})+\frac{L}{4}|\mathbf{x}|^2$ δείξτε οτι υπάρχει θετική σταθερά M_U τ.ω.

$$\max_{x\in\bar U}u\le\max_{x\in\partial U}|g|+M_U\max_{x\in\bar U}|f|.$$

(ii) Δείξτε την (1).