

Numéro d'ordre :

UNIVERSITÉ DE PARIS - SUD

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Paris - Sud

Mention : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée et soutenue par

Adrien SEMIN

Propagation d'ondes dans des jonctions de fentes minces

Thèse dirigée par Patrick JOLY et Bertrand MAURY

préparée à l'INRIA Rocquencourt, Projet POEMS

soutenue le (à définir) devant la commission suivante

Jury

<i>Directeurs :</i>	Patrick JOLY	- INRIA Rocquencourt (POems)
	Bertrand MAURY	- Université Paris - Sud
<i>Rapporteurs :</i>	Stéphane LABBÉ	- Université Joseph Fourier - Grenoble
	Frédéric NATAF	- Université Paris 6
<i>Examineurs :</i>	Houssem HADDAR	- INRIA Saclay (DeFI)
	Serge NICAISE	- Université de Valenciennes



Remerciements

A faire en dernier :-)

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Résolution dans des jonctions de fentes minces	1
1.1.1	Introduction du problème	1
1.1.2	Plan de la première partie de la thèse	2
1.2	Résolution dans des domaines fractals	3
1.2.1	Introduction du problème	3
1.2.2	Plan de la seconde partie de la thèse	4
I	Conditions de Kirchhoff améliorées	7
2	Problème de Helmholtz dans une jonction de 2 fentes minces	9
2.1	Modélisation du problème	9
2.1.1	Géométrie du domaine et problème considéré	9
2.1.2	Le problème 1D limite	12
2.2	Développements asymptotiques formels	15
2.2.1	Pourquoi utiliser des développements asymptotiques raccordés ou multi-échelles?	15
2.2.2	Décomposition de domaines avec recouvrement	19
2.2.3	Développements asymptotiques et équations basiques	20
2.2.4	Conditions de raccord	21
2.3	Justification des développements formels et estimations d'erreurs	28
2.3.1	Existence et unicité des développements formels	28
2.3.2	Estimations d'erreurs	35
2.4	Construction et analyse des conditions de Kirchhoff améliorées	43
2.4.1	Construction des conditions de Kirchhoff	43
2.4.2	Analyse des conditions de Kirchhoff	44
2.4.3	Étude d'un problème de réflexion-transmission	47
3	Problème d'acoustique dans une jonction de N fentes	55
3.1	Modélisation du problème	55
3.1.1	Géométrie du problème considéré	55
3.1.2	Découpage canonique du domaine	57
3.1.3	Le problème 1D limite	59
3.2	Développements asymptotiques	60
3.2.1	Décomposition de domaines avec recouvrement	60
3.2.2	Développements asymptotiques et équations basiques	61
3.2.3	Conditions de raccord	62
3.3	Justification des développements formels et estimations d'erreurs	67
3.3.1	Existence et unicité des développements formels	67
3.3.2	Estimations d'erreurs	77
3.4	Construction et analyse des conditions de Kirchhoff améliorées	81
3.4.1	Construction des conditions de Kirchhoff	81
3.4.2	Analyse des conditions de Kirchhoff	86

4	Résultats numériques	95
4.1	Résolution numérique des problèmes de Laplace avec DtN	95
4.1.1	Rappel du problème continu et troncature de l'opérateur T_+	95
4.1.2	Discrétisation du problème tronqué	97
4.1.3	Implémentation en MATLAB et résultats numériques	99
4.2	Cas d'une jonction de deux fentes	102
4.2.1	Résolution numérique	104
4.2.2	Estimations d'erreurs	106
4.3	Cas d'une jonction de deux fentes (modèle temporel)	107
4.3.1	Étude de la stabilité numérique du schéma	108
4.3.2	Estimations d'erreur	110
4.4	Cas d'une jonction de N fentes	111
4.4.1	Méthode de calcul des matrices \mathcal{J} et \mathcal{A}	111
4.4.2	Schéma numérique	115
II	Résolution dans des réseaux infinis	119
5	Résolution du problème de Laplace dans un réseau fractal	121
5.1	Notations et formules utiles	121
5.2	Réseaux p -adiques auto-similaires et espaces fonctionnels associés	124
5.2.1	Définitions et propriétés élémentaires du réseau	124
5.2.2	Espaces de Sobolev et normes faibles	128
5.2.3	Fonctions auto-similaires	132
5.3	Densité des fonctions à support compact	133
5.3.1	$\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$: une première CNS implicite	133
5.3.2	Étude d'un problème de Laplace auxiliaire et CNS explicite	136
5.4	Quelques résultats sur les opérateurs de trace	143
5.4.1	Définition des opérateurs de trace	144
5.4.2	Théorèmes de trace	145
6	Résolution du problème de Helmholtz dans un réseau fractal	153
6.1	Introduction du problème de Helmholtz et résultats généraux	153
6.1.1	Compléments sur les espaces de Sobolev et problème de Helmholtz	153
6.1.2	Quelques résultats de compacité	155
6.2	Résolution du problème auto-similaire et construction d'opérateurs DtN	162
6.2.1	Définitions et propriétés générales	162
6.2.2	Restriction du problème pour certains cas particuliers	164
6.3	Calculs numériques de l'opérateur DtN λ	167
6.3.1	Résultats qualitatifs pour la fonction $\lambda_{\mathbf{d}}$	168
6.3.2	Étude de la singularité de $\lambda_{\mathbf{n}}$ due à la géométrie	168
7	Résolution du problème d'onde acoustique dans un réseau fractal	173
7.1	Caractère bien posé du problème en temporel	173
7.2	Résolution numérique	176
7.2.1	Résultats qualitatifs pour le modèle temporel	176
7.2.2	Résultats quantitatifs pour le modèle temporel	177
7.2.3	Test de l'instabilité pour le problème de Neumann	177

III	Conclusion générale et références	181
8	Conclusion générale	183
8.1	Principaux résultats obtenus	183
8.2	Perspectives de recherche	183
8.2.1	Jonction de fentes minces	183
8.2.2	Réseaux infinis	184
8.2.3	Combinaison des deux phénomènes	185
A	Quelques propriétés sur les opérateurs DtN non-locaux	187
A.1	Cas particulier d'une jonction de deux fentes	187
A.2	Cas général	190
	Bibliographie	191

Introduction générale

Cette thèse dispose de deux parties indépendantes d'un point de vue conceptuel, qui correspondent à deux problèmes de modélisation distincts, et que nous détaillons dans les deux sections ci-dessous. Il est d'ailleurs important de garder ce point en tête pour pouvoir lire chaque partie de manière indépendante.

1.1 Résolution dans des jonctions de fentes minces

1.1.1 Introduction du problème

Lorsque nous voulons faire des simulations numériques d'équation d'ondes dans des domaines bi-dimensionnels ou tridimensionnels où une des dimensions est petite par rapport aux autres et où nous utilisons des maillages de Delaunay [Joe86], le coût de calcul est d'autant plus grand que le rapport entre la plus grande dimension et la plus petite dimension est importante. De plus, nous pouvons constater numériquement que le nombre de points de discrétisation pris est beaucoup trop important au regard des phénomènes considérés. Une première simplification consisterait à dire que, puisque la solution varie pas ou peu suivant les petites dimensions, nous imposons le fait que cette solution est constante suivant les petites dimensions ; l'idée étant que nous ne discrétisons que suivant les directions où la solution varie, réduisant ainsi significativement le nombre de degrés de liberté et *a fortiori* le temps de calcul de la solution.

Si nous considérons le problème de Helmholtz sur un graphe bidimensionnel comportant un nombre fini d'arêtes, où chaque arête de ce graphe a une épaisseur constante et proportionnelle à ε , ε étant notre petit paramètre, une idée tentante est de considérer le graphe limite monodimensionnel et de poser le problème de Helmholtz sur chaque arête de ce graphe limite. Une question naturelle se pose alors de savoir quelles sont les conditions que nous faisons intervenir sur les nœuds intérieurs du graphe. Une première contribution en ce sens a été développée pour l'étude des circuits électriques par Gustav Kirchhoff en 1845 : au niveau de chaque nœud du circuit (correspondant à une connection d'au moins trois fils), le potentiel est une grandeur continue, et la somme des intensités sortantes de ce nœud est nulle. Cette loi de Kirchhoff se traduit pour l'équation de Helmholtz par : en chaque nœud M d'un graphe, la solution u de notre problème de Helmholtz est continue (*i.e.* la valeur de u ne dépend pas du choix de l'arête du graphe reliée au nœud M), et la somme des dérivées spatiales est nulle. Bien que cette loi a été énormément utilisée (et sans être limitée au problème de Helmholtz - entre autres, nous pouvons citer les travaux J.P. Roth sur le spectre du Laplacien sur un graphe [Rot84], de B. Dekoninck et S. Nicaise sur les spectres de réseaux de poutres [DN98], sans parler de toute l'industrie du microprocesseur dont le fonctionnement repose essentiellement sur le comportement des transistors et sur cette loi), sa justification mathématique semble être très récente et peut être trouvée d'une part dans les travaux de J. Rubinstein et M. Schatzmann [RS01a], d'autre part dans les travaux de P. Kuchment [Kuc02], bien que ces auteurs ne regardent pas le problème de Helmholtz à proprement parler. En étudiant les modèles limites obtenus, nous pouvons constater qu'il existe une infinité non-dénombrables de géométries bidimensionnelles qui admettent le même graphe topologique limite. Nous constatons également que le problème limite obtenu ne voit que la topologie du graphe, et ne voit pas

la géométrie du graphe. Une question assez naturelle est de savoir si nous pouvons définir un problème sur le graphe topologique limite qui prend mieux en compte la géométrie du graphe bidimensionnel, avec une prise en compte dépendant de ε .

Si nous regardons ce qui se passe numériquement pour la solution du problème de Helmholtz sur le graphe bidimensionnel, nous pouvons voir que fondamentalement le comportement de la solution va être monodimensionnel au niveau des arêtes, et bidimensionnel au niveau des jonctions. Cette différence de comportement nous incite fortement à utiliser des méthodes de développement pour dériver la solution. En nous basant d'une part sur un article de P. Joly et S. Tordeux [JT06], et en constatant d'autre part qu'un développement "naïf" de la solution conduit à un problème mal posé, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés pour dériver la solution. Cette méthode a été initialement introduite dans les années 1970 pour analyser des phénomènes de couches frontières, et a été développée de manière quasi-indépendante (au sens où le nombre de références croisées est assez faible) par des écoles mathématiques qui ont un point de vue distinct :

- l'école Britannique dont les efforts se sont concentrés sur l'automatisation de l'obtention des développements formels et des principes de raccord (nous pouvons citer par exemple le livre de M Van Dyke [VD75] pour les outils basiques des développements asymptotiques raccordés),
- l'école Russe qui s'est plus penchée sur les justifications rigoureuses des développements asymptotiques raccordés (nous pouvons citer entre autres les travaux de Kongrat'ev [Kon67] et de Il'in [II'92])

La méthode des développements asymptotiques raccordés est une alternative intéressante à la méthode multi-échelles, longtemps préférée par les mathématiciens (pour plus de précisions sur la méthode multi-échelles, nous pouvons nous référer par exemples aux travaux de W. G. Mazja, S. A. Nazarov et A. B. Plameweski [MNP91a, MNP91b] ou à ceux de G. Vial [Via03]), en raison d'une justification plus rigoureuse *a priori* de cette dernière méthode. Cependant, un travail récent de M. Dauge, S. Tordeux et G. Vial [DTV06] montre que ces deux méthodes de développements asymptotiques sont strictement équivalentes.

1.1.2 Plan de la première partie de la thèse

Nous avons décomposé la première partie de la thèse en trois chapitres. Les deux premiers chapitres sont indépendant et ont la même structure - nous détaillerons donc ici la structure du chapitre 2.

- Dans la section 2.1, nous introduisons le problème modèle que nous considérons, et nous donnons les résultats connus sur le problème limite. Nous pouvons voir en particulier quelles informations sur la géométrie du problème exact sont occultées si nous ne considérons que le problème limite.
- Dans la section 2.2, nous écrivons les développements asymptotiques formels de la solution, et nous déterminons quelles sont les équations satisfaites par les différentes termes du développement. Il s'agit d'une étape extrêmement calculatoire, durant laquelle aucune justification sur l'existence des termes du développement n'est apportée.
- Dans la section 2.3, nous démontrons *a posteriori* l'existence et l'unicité de chaque terme du développement asymptotique, et le fait que la troncature du développement asymptotique nous donne une fonction qui est de plus en plus proche de la solution exacte à mesure que nous considérons de plus en plus de termes.
- La section 2.4 dérive des sections précédentes. Nous y montrons comment, à partir de la connaissances des premiers termes du développement asymptotique, nous pouvons construire un problème posé sur la même géométrie que le problème limite et qui permet de mieux prendre en comptes les informations sur la géométrie du problème exact.

Le chapitre 3 est une complexification du chapitre 2 suivant deux points indépendants, mais que nous avons choisi de traiter simultanément :

- nous ne considérons non plus ici une jonction de deux fentes minces de même épaisseur, mais une jonction de N fentes d'épaisseurs quelconques - nous considérons toutefois que ces épaisseurs restent proportionnelles à notre paramètre ε ,
- nous considérons le problème d'onde en régime transitoire. Le fait de se placer en régime transitoire apporte des difficultés supplémentaires concernant la justification des termes du développement asymptotique raccordé et sur les estimations d'erreur, et n'a été rendu possible *a priori* parce que le problème que nous construisons sur la géométrie limite ne dépend que de ω (dans le cas des travaux de S. Tordeux [Tor04] ou de X. Claeys [Cla08], les développements asymptotiques font intervenir des termes en $\ln(\omega)$), ce qui rend beaucoup plus difficile l'étude du problème en temporel.

Le chapitre 4 est une compilation des résultats numériques associés aux chapitres 2 et 3.1. Ce chapitre a comme structure la structure suivante.

- Dans la section 4.1, nous détaillons la résolution numériques de problèmes de Laplace avec conditions non-standard intervenant à la fois dans le chapitre 2 et dans le chapitre 3.1. Nous montrons comment nous pouvons discrétiser ces problèmes en utilisant des éléments finis standard (que nous pouvons trouver par exemple dans le livre de P. G. Ciarlet [Cia02]), et nous montrons les implémentations numériques effectuées avec différents langages (MATLAB pour des raisons historiques, puis FREEFEM++ pour améliorer la vitesse de calcul à précision donnée et pour pouvoir faire des extensions en trois dimensions).
- Dans la section 4.2, nous donnons des résultats numériques associés au modèle développé dans la section 2.4, et nous donnons des résultats aussi bien qualitatifs que quantitatifs.
- Dans la section 4.3, nous donnons des résultats numériques associés à un modèle se trouvant à mi-chemin entre les chapitres 2 et 3.1, *i.e.* la version temporelle du modèle de la section 2.4 obtenue en remplaçant $-\omega$ par une dérivée par rapport au temps. Nous donnons également des résultats qualitatifs et quantitatifs.
- Enfin, dans la section 4.4, nous donnons des résultats numériques associés au modèle développé dans la section 3.4, et nous donnons des résultats aussi bien qualitatifs que quantitatifs.

1.2 Résolution dans des domaines fractals

1.2.1 Introduction du problème

La question qui est à la base de la seconde partie de la thèse est : que se passe-t-il si le nombre d'arêtes dans le graphe bidimensionnel que nous considérons dans la première partie n'est pas fini, mais reste dénombrable ? Si le volume de la géométrie que nous considérons est fini, et si le nombre d'arêtes que nous considérons est infini, il est évident que la longueur moyenne aussi va tendre vers 0, donc même si nous utilisons l'approximation $1D$ de la solution avec les lois de Kirchhoff classique en chaque nœud intérieur du graphe, nous ne pouvons pas calculer numériquement la solution sur le graphe entier.

Nous regardons le graphe infini comme la limite d'une suite de graphes finis lorsque le nombre d'arêtes pris en compte tend vers l'infini. Nous pouvons trouver principalement deux types de configuration.

- Les arêtes que nous rajoutant se trouve dans le volume déterminé par les arêtes précédentes. L'exemple le plus connu de configuration est le triangle de Sierpinski, sur lequel un grand nombre de références bibliographiques peut être trouvées (à titre d'exemple, nous pouvons regarder [SW04, BSU08]). Nous pouvons aussi trouver des résultats concernant le tétraèdre de Sierpinski.
- Le graphe infini que nous considérons possède une structure d'arbre (nous nous interdisons donc les boucles, contrairement à ce qui pouvait se passer dans le triangle de Sierpinski), avec une origine. Nous considérons alors qu'une arête appartient à la génération n , avec $n \in \mathbb{N}$, si il faut exactement n arêtes (autres que celle-ci) pour rejoindre l'origine. Nous appellerons réseau p -adique, ou arbre p -adique, tout arbre tel que la génération 0 de l'arbre ne contienne qu'une arête et tel que toute arête de la génération n de l'arbre soit reliée à exactement p arêtes de la génération $n+1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'exemple concret le plus connu dans la littérature est le poumon (vu comme un réseau 2-adique, nous pouvons trouver des informations beaucoup plus précises quant aux paramètres géométriques dans les travaux de E. R. Weibel [Wei63]) que nous considérons comme étant la troncature à 23 générations d'un arbre infini (cette hypothèse peut aussi être retrouvée dans les travaux de B. Maury, D. Salort et C. Vannier [MSV09])

Il existe également des résultats de Y. Achdou, C. Sabot et N. Tchou [AST06, AST07, AT07] concernant des résultats sur l'étude du problème de Laplace et de Helmholtz dans le cas d'une géométrie fractale bidimensionnelle qui peut être décrite par un arbre 2-adique, mais pour un cas particulier seulement de géométrie.

1.2.2 Plan de la seconde partie de la thèse

Nous avons comme finalité de traiter le problème de propagation d'onde en régime temporel sur un réseau p -adique. Afin de pouvoir étudier le problème en régime temporel, nous étudions dans un premier temps le problème en régime harmonique. Un argument de scalabilité nous donne qu'à fréquence fixée, plus nous allons loin dans le réseau p -adique, plus les longueurs sont censées être petites, et plus la fréquence sera vue comme étant basse. Il est donc intéressant d'étudier le problème de Laplace dans un premier temps, puis de considérer le problème de Helmholtz comme une perturbation que nous espérons compacte du problème de Laplace. Le plan de la seconde partie est donné comme par le plan suivant.

- Dans le chapitre 5, nous introduisons une famille particulière de réseaux p -adiques auto-similaires. Nous introduisons les problèmes de Laplace avec condition de "Neumann" et de "Dirichlet" à l'infini de l'arbre. Nous introduisons dans la section 5.2 les espaces fonctionnels adaptés à l'étude du problème de Laplace, et nous donnons dans la section 5.3 la densité des fonctions à support compact (au sens du nombre de générations du réseau sur lesquelles les fonctions sont non-nulles). Nous donnons quelques résultats implicites concernant la compacité, puis nous explicitons ces résultats en résolvant le problème de Laplace. Enfin, nous définissons dans la section 5.4 une notion de trace à l'infini de l'arbre.
- Dans le chapitre 6, nous étendons les résultats à la résolution du problème de Helmholtz. Nous donnons d'abord dans la section 6.1 des résultats de compacité sur les espaces fonctionnels que nous avons introduits dans le chapitre 5. Dans la section 6.2, nous montrons comment nous pouvons restreindre résolution du problème de Helmholtz à un nombre fini de générations modulo l'écriture d'opérateurs Dirichlet-to-Neumann dépendant de la fréquence. Enfin, dans la section 6.3, nous montrons des résultats numériques sur l'opérateur DtN que nous construisons.
- Dans le chapitre 7, nous nous basons sur le fait que, sur les générations lointaines du réseau, les données sont surtout des données basses fréquences, afin de pouvoir construire une version

approchée de l'opérateur DtN construit dans la section 6.2 et qui est implémentable en temps. Nous montrons d'abord le caractère bien posé dans la section 7.1, Nous montrons ensuite dans la section 7.2 des résultats numériques associés au problème posé dans la section 6.2.

Première partie

Conditions de Kirchhoff améliorées

Problème de Helmholtz dans une jonction de 2 fentes minces

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de Helmholtz, posé sur un domaine singulier dont une des tailles est petite devant la longueur d'onde (section 2.1). Nous montrons que nous pouvons construire un développement régulier de la solution de ce problème, et que le développement que nous construisons est une bonne approximation (sections 2.2 et 2.3). Enfin, nous montrons qu'il existe un problème de Helmholtz sur un domaine plus simple dont la solution a le même développement que la solution du problème initial, jusqu'à un certain ordre du développement (section 2.4).

Sommaire

2.1	Modélisation du problème	9
2.1.1	Géométrie du domaine et problème considéré	9
2.1.2	Le problème 1D limite	12
2.2	Développements asymptotiques formels	15
2.2.1	Pourquoi utiliser des développements asymptotiques raccordés ou multi-échelles?	15
2.2.2	Décomposition de domaines avec recouvrement	19
2.2.3	Développements asymptotiques et équations basiques	20
2.2.4	Conditions de raccord	21
2.3	Justification des développements formels et estimations d'erreurs	28
2.3.1	Existence et unicité des développements formels	28
2.3.2	Estimations d'erreurs	35
2.4	Construction et analyse des conditions de Kirchhoff améliorées	43
2.4.1	Construction des conditions de Kirchhoff	43
2.4.2	Analyse des conditions de Kirchhoff	44
2.4.3	Étude d'un problème de réflexion-transmission	47

2.1 Modélisation du problème

Dans cette section, nous introduisons la géométrie de notre problème modèle (section 2.1.1), et nous donnons quelques résultats sur le problème limite (section 2.1.2).

2.1.1 Géométrie du domaine et problème considéré

Nous considérons un domaine composé d'une réunion de deux fentes (voir la figure 2.1). Plus précisément, nous considérons comme domaine la réunion de deux rectangles fins de longueur respective L_- et L_+ et de largeur ε , et d'une zone de jonction J_α^ε . Une caractéristique géométrique de ce domaine

est l'angle 2α formé entre les deux fentes minces. Vis-à-vis de l'analyse asymptotique, nous considérons en fait une famille de domaines $\Omega_\alpha^\varepsilon$ où ε varie (dans un premier temps, nous garderons le paramètre α fixé). Nous faisons ici le choix délibéré (ce choix a une influence sur l'analyse asymptotique) de garder un des bords du domaine $\Omega_\alpha^\varepsilon$ fixé, plus précisément la réunion des deux segments S_- et S_+ qui s'intersectent au coin entrant de la zone de jonction. Analytiquement, nous avons

$$\Omega_\alpha^\varepsilon = \Omega_-^\varepsilon \cup \Omega_+^\varepsilon \cup J_\alpha^\varepsilon \quad (2.1.1)$$

où $J_\alpha^\varepsilon = \varepsilon \widehat{J}_\alpha$ où \widehat{J}_α est la jonction normalisée donnée par la figure 2.2, et

$$\begin{cases} \Omega_\pm^\varepsilon = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / 0 < \pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^\pm < L_\pm, -\varepsilon < \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\pm < 0 \} \\ \mathbf{t}^- = (1, 0)^t, \quad \mathbf{n}^- = (0, 1)^t \\ \mathbf{t}^+ = (\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))^t, \quad \mathbf{n}^+ = (-\sin(2\alpha), \cos(2\alpha))^t \end{cases}$$

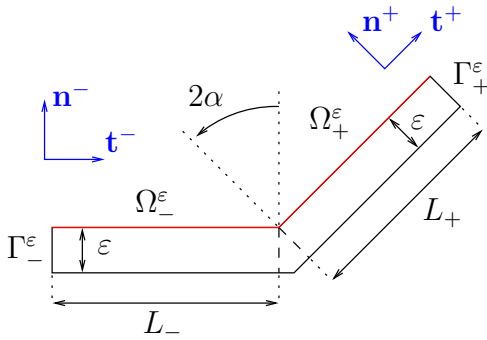


FIGURE 2.1 – Configuration du domaine $\Omega_\alpha^\varepsilon$

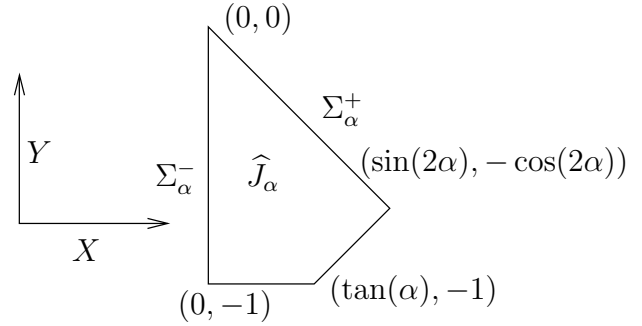


FIGURE 2.2 – Interface normalisée \widehat{J}_α

Remarque 2.1.1. Il est possible de prendre d'autres formes pour la jonction normalisée \widehat{J}_α . Nous verrons dans la section 2.4 sur quels paramètres intervient la forme de la jonction.

Sur ce domaine, nous considérons le problème suivant : trouver $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\alpha^\varepsilon; \mathbb{C})$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\alpha^\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - i\omega u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\alpha^\varepsilon \setminus (\Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma_+^\varepsilon) \end{cases} \quad (2.1.2)$$

où n dénote le vecteur unitaire normal extérieur à $\partial\Omega_\alpha^\varepsilon$, et $f^\varepsilon \in L^2(\Omega_\alpha^\varepsilon; \mathbb{C})$ telle que

- le support de la fonction f^ε est disjoint d'un voisinage de la jonction J_α^ε ,
- sur chaque fente Ω_\pm^ε , il existe une fonction $\mathbf{f} \in L^2(S_- \cup S_+)$ telle que

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^\pm), \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\pm^\varepsilon$$

Remarque 2.1.2. La seconde ligne du système (2.1.2) décrit le fait que la fonction inconnue u^ε vérifie la condition de radiation de Sommerfeld. Le lecteur peut voir par exemple [KG89] pour plus de détails. Ici, nous utilisons une approximation à l'ordre 1 de la condition de radiation, mais qui suffit pour notre analyse asymptotique.

Au système (2.1.2), nous associons une formulation variationnelle de la manière suivante : nous multiplions la première ligne par ε^{-1} fois une fonction test $v \in \mathbf{H}^1(\Omega_\alpha^\varepsilon; \mathbb{C})$, et nous utilisons une intégration par parties sur le terme en $-\Delta u^\varepsilon v$. Nous obtenons

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v - \omega^2 u^\varepsilon v) - \frac{i\omega}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\pm^\varepsilon} u^\varepsilon v = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} f^\varepsilon v \quad (2.1.3)$$

Il est judicieux de diviser par ε pour avoir, lorsque nous prenons la fonction test $v = 1$, le membre de droite de (2.1.3) indépendant de ε .

Notation 2.1.3. Nous appellerons $a^\varepsilon(u^\varepsilon, v)$ la formulation bilinéaire symétrique associée au membre de gauche de l'équation (2.1.3) et $\ell(v)$ le membre de droite.

Sur chacun des trois domaines (Ω_-^ε , J_α^ε et Ω_+^ε), nous définissons les changements de variable cartésiens suivants :

- le changement de variable $\Xi_-^\varepsilon : \widehat{\Omega}_- =]-L_-, 0[\times]-1, 0[\rightarrow \Omega_-^\varepsilon$ et qui à tout couple $(\hat{s}, \hat{\nu}) \in \widehat{\Omega}_-$ associe

$$\Xi_-^\varepsilon(\hat{s}, \hat{\nu}) = \hat{s} \mathbf{t}^- + \varepsilon \hat{\nu} \mathbf{n}^- \quad (2.1.4)$$

- le changement de variable $\Xi_+^\varepsilon : \widehat{\Omega}_+ =]0, L_+[\times]-1, 0[\rightarrow \Omega_+^\varepsilon$ et qui à tout couple $(\hat{s}, \hat{\nu}) \in \widehat{\Omega}_+$ associe

$$\Xi_+^\varepsilon(\hat{s}, \hat{\nu}) = \hat{s} \mathbf{t}^+ + \varepsilon \hat{\nu} \mathbf{n}^+ \quad (2.1.5)$$

- le changement de variable $\Xi_J^\varepsilon : \widehat{J}_\alpha \rightarrow J_\alpha^\varepsilon$, et qui à $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{J}_\alpha$ associe

$$\Xi_J^\varepsilon(\widehat{\mathbf{x}}) = \varepsilon \widehat{\mathbf{x}} \quad (2.1.6)$$

et nous notons le domaine canonique ainsi constitué¹

$$\widehat{\Omega}_\alpha = \widehat{\Omega}_- \cup \widehat{\Omega}_+ \cup \widehat{J}_\alpha$$

Nous appelons également Ξ^ε la transformation affine par morceaux qui fait passer du domaine $\widehat{\Omega}_\alpha$ au domaine $\Omega_\alpha^\varepsilon$ et telle que

$$\Xi^\varepsilon = \begin{cases} \Xi_-^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Omega}_- \\ \Xi_+^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Omega}_+ \\ \Xi_J^\varepsilon & \text{sur } \widehat{J}_\alpha \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Pour finir, nous appelons $\widehat{\Gamma}_\pm = (\Xi^\varepsilon)^{-1} \Gamma_\pm^\varepsilon$.

Remarque 2.1.4. En utilisant ces changements de variable, il est alors naturel de paramétrer S_- et S_+ par leur abscisse curviligne \hat{s} , avec $\hat{s} = 0$ au point de jonction. De plus, dans le cas où $v \in \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}_\pm)$ ne dépend pas de la variable transverse $\hat{\nu}$, nous pouvons voir (avec quelques abus de notations) que

$$\|v\|_{\mathbf{H}^1(S_\pm)} = \|v\|_{\mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}_\pm)}$$

1. en alignant les axes des domaines Ω_+^ε et $\widehat{\Omega}_+$

2.1.2 Le problème 1D limite

Les résultats de cette section peuvent être vus comme un cas analogue aux résultats sur les réseaux de fentes minces que nous pouvons trouver par exemple dans les travaux de Jacob Rubinstein et Michelle Schatzman [RS01a, RS01b] ou encore dans les travaux de Peter Kuchment [Kuc02]. Ici, nous montrons que d'une part le problème (2.1.2) est bien posé, et d'autre part que la solution de ce problème converge en un sens que l'on précisera vers la solution u^0 d'un problème posé sur $S_- \cup S_+$.

Proposition 2.1.5. *À ε et ω fixés, le problème (2.1.2) admet une unique solution.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le cadre de Lax-Milgram ne s'applique pas (nous ne pouvons pas démontrer la coercivité). Nous allons utiliser l'alternative de Fredholm. Soit l'opérateur compact T_ω^ε qui à $f \in L^2(\Omega_\alpha^\varepsilon, \mathbb{C})$ associe $u \in H^1(\Omega_\alpha^\varepsilon, \mathbb{C})$ solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega_\alpha^\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \imath \omega u = 0 & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\alpha^\varepsilon \setminus (\Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma_+^\varepsilon) \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Il est facile de voir en utilisant le théorème de Lax-Milgram que ce problème est bien posé. Nous réécrivons alors la première ligne de (2.1.2) sous la forme

$$-\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon - (\omega^2 + 1)u^\varepsilon = f^\varepsilon$$

Nous avons donc

$$-\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f^\varepsilon + (\omega^2 + 1)u^\varepsilon$$

Par définition de l'opérateur T_ω^ε , nous avons

$$u^\varepsilon = T_\omega^\varepsilon (f^\varepsilon + (\omega^2 + 1)u^\varepsilon)$$

ce qui nous donne

$$(I - (\omega^2 + 1)T_\omega^\varepsilon)u^\varepsilon = T_\omega^\varepsilon f^\varepsilon \quad (2.1.9)$$

Le problème de départ (2.1.2) revient, d'après l'égalité (2.1.9), à inverser l'opérateur $I - (\omega^2 + 1)T_\omega^\varepsilon$. D'après l'alternative de Fredholm (dont la démonstration peut par exemple être trouvée dans [Ram01]), démontrer la bijectivité de cet opérateur revient à démontrer l'injectivité. Il suffit alors de démontrer que les valeurs propres de l'opérateur T_ω^ε ne sont pas réelles. Supposons par l'absurde que cet opérateur a une valeur propre réelle λ et un vecteur propre associé U . En utilisant la définition de T_ω^ε donnée par (2.1.8), nous avons

$$\begin{cases} -\Delta U + U = \lambda U & \text{dans } \Omega_\alpha^\varepsilon \\ \frac{\partial U}{\partial n} - \imath \omega U = 0 & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\alpha^\varepsilon \setminus (\Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma_+^\varepsilon) \end{cases} \quad (2.1.10)$$

En multipliant par \bar{U} la première ligne de (2.1.10), et en faisant une intégration par parties, nous avons

$$\|\nabla U\|_{L^2(\Omega_\alpha^\varepsilon, \mathbb{C})}^2 + (1 - \lambda)\|U\|_{L^2(\Omega_\alpha^\varepsilon, \mathbb{C})}^2 + \imath \omega \|U\|_{\Gamma_\pm^\varepsilon}^2 = 0 \quad (2.1.11)$$

En prenant la partie imaginaire de (2.1.11), nous avons U nul sur Γ_\pm^ε . En utilisant la seconde ligne de (2.1.10), nous avons également la dérivée normale de U nulle sur Γ_\pm^ε . Nous obtenons alors U nul sur $\Omega_\alpha^\varepsilon$, ce qui contredit le fait que U est un vecteur propre.

Puisque $\omega^2 + 1$ est réel et que l'opérateur T_ω^ε n'admet aucune valeur propre réelle, nous avons l'injectivité de l'opérateur $I - (\omega^2 + 1)T_\omega^\varepsilon$, donc la bijectivité, donc le problème (2.1.2) admet une unique solution. \square

Nous voulons maintenant connaître le comportement de u^ε par rapport à ε . En regardant la géométrie du domaine, nous voyons clairement que lorsque ε tend vers 0, le domaine $\Omega_\alpha^\varepsilon$ tend vers la réunion des deux segments S_- et S_+ . L'intuition nous dit que dans ce cas-là, la fonction u^ε tend vers une fonction définie sur $S_- \cup S_+$.

À ε fixé, il est facile de voir que les espaces $H^1(\Omega_\alpha^\varepsilon, \mathbb{C})$ et $H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$ sont équivalents. Nous allons donc travailler avec l'espace $H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique forme linéaire $A^\varepsilon : H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$ telle que

$$a^\varepsilon(u \circ (\Xi^\varepsilon)^{-1}, v \circ (\Xi^\varepsilon)^{-1}) = (A^\varepsilon u, v)_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \quad \forall u, v \in H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C}) \quad (2.1.12)$$

Nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant, qui nous assure un résultat de stabilité inconditionnel par rapport à ε :

Lemme 2.1.6. *Il existe C indépendant de ε tel que $\|A^\varepsilon u\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \geq C \|u\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})}$*

Démonstration. Par contradiction, si le lemme 2.1.6, il existe une suite de fonctions $(v^\varepsilon \in H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C}))_{\varepsilon \rightarrow 0}$ telle que

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|A^\varepsilon v^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} = 0 \quad (2.1.13)$$

Puisque la suite v^ε est bornée dans $H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$, quitte à extraire une sous-suite près par compacité, nous pouvons supposer que la suite v^ε converge faiblement dans $H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$ et fortement dans $L^2(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$ vers une fonction v^0 . Nous utilisons alors la représentation de Riesz donnée par (2.1.12) en prenant $u = v^\varepsilon$ et $v = \overline{v^\varepsilon}$, nous obtenons

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla (v^\varepsilon \circ (\Xi^\varepsilon)^{-1})\|_{L^2(\Omega_\alpha^\varepsilon, \mathbb{C})}^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \|v^\varepsilon \circ (\Xi^\varepsilon)^{-1}\|_{L^2(\Omega_\alpha^\varepsilon, \mathbb{C})}^2 \\ &+ \frac{i\omega}{\varepsilon} \|v^\varepsilon \circ (\Xi^\varepsilon)^{-1}\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon, \mathbb{C})}^2 + (A^\varepsilon v^\varepsilon, \overline{v^\varepsilon})_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \end{aligned} \right. \quad (2.1.14)$$

Nous appliquons le changement de variable Ξ^ε défini par (2.1.7) pour se ramener au domaine $\widehat{\Omega}_\alpha$. L'égalité (2.1.14) devient alors :

$$\left| \begin{aligned} &\left\| \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \hat{s}} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\pm, \mathbb{C})}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \hat{v}} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\pm, \mathbb{C})}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{J}_\alpha, \mathbb{C})}^2 \\ &= \omega^2 \|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\pm, \mathbb{C})}^2 + \varepsilon \omega^2 \|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{J}_\alpha, \mathbb{C})}^2 + i\omega \|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_\pm, \mathbb{C})}^2 + (A^\varepsilon v^\varepsilon, \overline{v^\varepsilon})_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \end{aligned} \right. \quad (2.1.15)$$

Le membre de droite de l'égalité (2.1.15) est uniformément borné par une constante C quand ε tend vers 0 : en effet, nous avons

- $\|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\pm, \mathbb{C})} \leq \|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})}$ et $\|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{J}_\alpha, \mathbb{C})} \leq \|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})}$ de manière évidente,
- $\|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_\pm, \mathbb{C})} \leq C \|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})}$ en utilisant un théorème de trace classique, dont la preuve peut par exemple être trouvée dans [Bre83],
- $(A^\varepsilon v^\varepsilon, \overline{v^\varepsilon})_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \leq \|A^\varepsilon v^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})}$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

et nous utilisons l'hypothèse (2.1.13) pour majorer chacun de ces termes. Nous en déduisons que le membre de gauche de (2.1.15) est également uniformément borné par C quand ε tend vers 0. La convergence faible de v^ε vers v^0 nous donne alors immédiatement que

$$\left\| \frac{\partial v^0}{\partial \hat{\nu}} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\pm, \mathbb{C})} = \|\nabla v^0\|_{L^2(\widehat{\mathcal{J}}_\alpha, \mathbb{C})} = 0$$

et nous avons même

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \hat{\nu}} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\pm, \mathbb{C})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\mathcal{J}}_\alpha, \mathbb{C})} = 0 \quad (2.1.16)$$

Il est alors naturel d'introduire l'espace $H_{\text{lim}}^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$ dans lequel vit la solution v^0 :

$$H_{\text{lim}}^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C}) = \left\{ v \in H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C}) \text{ tel que } v(\hat{s}, \hat{\nu}) = v(\hat{s}) \text{ dans } \widehat{\Omega}_\pm \text{ et } v(\hat{\mathbf{x}}) = v(0) \text{ dans } \widehat{\mathcal{J}}_\alpha \right\} \quad (2.1.17)$$

Une fois ce résultat obtenu, on utilise la définition de la convergence faible de v^ε vers v^0 dans $H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$: pour toute fonction $w \in H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$, nous avons

$$(v^\varepsilon, w)_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \rightarrow (v^0, w)_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.1.18)$$

Prenons ε' fixé et prenons des fonctions tests $w = A^{\varepsilon'} \Phi$, avec $\Phi \in H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$. La relation (2.1.18) devient alors, en utilisant la symétrie de la forme bilinéaire $a^{\varepsilon'}$:

$$(A^{\varepsilon'} v^\varepsilon, \Phi)_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \rightarrow (A^{\varepsilon'} v^0, \Phi)_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.1.19)$$

Maintenant considérons des fonctions tests $\Phi \in H_{\text{lim}}^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$. Nous pouvons alors aisément voir que le produit scalaire $(A^{\varepsilon'} v^\varepsilon, \Phi)_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})}$ ne dépend pas du choix de ε' , en réutilisant (2.1.12) et en remarquant que les parties ε' -dépendantes sont annulées par le choix de Φ . En utilisant alors une extraction diagonale et l'hypothèse (2.1.13), nous obtenons

$$a^0(v^0, \Phi) = 0$$

qui n'est autre que

$$\int_{-L_-}^{L_+} \left(\frac{\partial v^0}{\partial \hat{s}}(\hat{s}) \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{s}}(\hat{s}) - \omega^2 v^0(\hat{s}) \Phi(\hat{s}) d\hat{s} \right) - \omega v^0(L_+) \Phi(L_+) - \omega v^0(-L_-) \Phi(-L_-) = 0 \quad (2.1.20)$$

Nous en déduisons $v^0 = 0$ en calculant explicitement la solution de (2.1.20), et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\alpha)} = 0 \quad (2.1.21)$$

Pour finir, en prenant la partie réelle de (2.1.15), et en utilisant des inégalités triviales, nous avons

$$\left\| \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \hat{s}} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\pm, \mathbb{C})}^2 \leq \omega^2 (1 + \varepsilon) \|v^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})}^2 + \|A^\varepsilon v^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \quad (2.1.22)$$

En utilisant (2.1.13) et (2.1.21), nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \hat{s}} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\pm, \mathbb{C})} = 0 \quad (2.1.23)$$

Finalement, en mettant bout à bout (2.1.16), (2.1.21) et (2.1.23), nous avons que $\|v^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} \rightarrow 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\|v^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})} = 1$. \square

Proposition 2.1.7. *Dans cette proposition, nous gardons uniquement ω fixé. Lorsque ε tend vers 0, la solution u^ε du problème (2.1.2), lorsque ε tend vers 0, satisfait les propriétés suivantes :*

- $u^\varepsilon \circ \Xi_\pm^\varepsilon$ tendent vers des fonctions $u_\pm^0 \in H^1(\widehat{\Omega}_\pm, \mathbb{C})$ ne dépendant pas de la variable \hat{v} ,
- $u^\varepsilon \circ \Xi_j^\varepsilon$ tend vers la constante $u(0)$,
- si nous appelons u^0 la fonction définie sur $] -L_-, L_+[$ par

$$u^0(\hat{s}) = \begin{cases} u_-^0(\hat{s}), & \hat{s} < 0 \\ u_+^0(\hat{s}), & \hat{s} > 0 \end{cases}$$

alors $u^0 \in H^1(] -L_-, L_+[, \mathbb{C})$ et

$$\begin{cases} -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = \mathbf{f} & \text{dans }] -L_-, L_+[\\ \frac{\partial u^0}{\partial n}(\hat{s}) - \omega u^0(\hat{s}) = 0 & \text{pour } \hat{s} = -L_- \text{ ou } \hat{s} = L_+ \end{cases} \quad (2.1.24)$$

Démonstration. Nous utilisons tout d'abord le résultat de stabilité donné par le lemme 2.1.6. En regardant plus en détail la démonstration du lemme de stabilité, nous pouvons remarquer que les dérivées de $u^\varepsilon \circ \Xi_\pm^\varepsilon$ par rapport à \hat{v} et le gradient de $u^\varepsilon \circ \Xi_j^\varepsilon$ tendent vers 0 lorsque ε tend vers 0, et le fait que la solution limite appartienne à $H_{\text{lim}}^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$ garantit la continuité au niveau de la jonction. Pour obtenir le système satisfait par u^0 , nous prenons la formulation variationnelle (2.1.3) en utilisant des fonctions tests $\Phi \circ (\Xi^\varepsilon)^{-1}$, où $\Phi \in H_{\text{lim}}^1(\widehat{\Omega}_\alpha, \mathbb{C})$. Nous obtenons alors

$$\int_{-L_-}^{L_+} \left(\frac{\partial v^0}{\partial \hat{s}}(\hat{s}) \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{s}}(\hat{s}) - \omega^2 v^0(\hat{s}) \Phi(\hat{s}) d\hat{s} \right) - \omega v^0(\pm L_\pm) \Phi(\pm L_\pm) = \int_{-L_-}^{L_+} \mathbf{f}(\hat{s}) \Phi(\hat{s}) d\hat{s}$$

qui n'est autre que la formulation variationnelle associée à (2.1.24). \square

Un résultat immédiat (et *a priori* surprenant) est que le problème limite (2.1.24) ne voit pas la géométrie de la jonction : en particulier, ce problème ne dépend pas de α ! Physiquement cela signifie que, si nous prenons \mathbf{f} à support compact dans S_- , l'onde incidente émise pour $\hat{s} < 0$ ne produit aucune réflexion lorsqu'elle atteint la jonction à $\hat{s} = 0$. Pour $\varepsilon > 0$, l'existence d'une onde réfléchie est attendue, et nous pouvons nous attendre à avoir l'amplitude de cette onde réfléchie grandir avec la valeur de ce paramètre α . La question que nous pouvons nous poser, et à laquelle nous allons apporter une réponse dans ce chapitre, est : existe-t-il un "modèle 1D amélioré" dont la solution serait une approximation plus précise de la solution exacte que u^0 , et permettrait en particulier d'observer une onde réfléchie ?

2.2 Développements asymptotiques formels

2.2.1 Pourquoi utiliser des développements asymptotiques raccordés ou multi-échelles ?

Une idée intuitive qui viendrait est : nous utilisons une hypothèse de développement naïve de la solution sur chacune des fentes $\widehat{\Omega}_\pm$, et une autre hypothèse de développement naïve de la solution sur la jonction $\widehat{\mathcal{J}}_\alpha$. Nous montrons alors qu'en essayant de construire les termes du développement, on aboutit à une contradiction.

2.2.1.1 Hypothèse d'écriture de la solution et généralités

Hypothèse 2.2.1. Il existe des familles de fonctions $(u_-^k, u_+^k, U^k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^1(\widehat{\Omega}_-, \mathbb{C}) \times H^1(\widehat{\Omega}_+, \mathbb{C}) \times H^1(\widehat{J}_\alpha, \mathbb{C})$ indépendantes de ε telles que

$$u^\varepsilon \circ \Xi_-^\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k u_-^k + o(\varepsilon^\infty) \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_- \quad (2.2.1-(i))$$

$$u^\varepsilon \circ \Xi_+^\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k u_+^k + o(\varepsilon^\infty) \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_+ \quad (2.2.1-(ii))$$

$$u^\varepsilon \circ \Xi_J^\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k U^k + o(\varepsilon^\infty) \quad \text{dans } \widehat{J}_\alpha \quad (2.2.1-(iii))$$

En injectant les différentes hypothèses d'écritures (2.2.1-(i)), (2.2.1-(ii)) et (2.2.1-(iii)) dans la première ligne du problème (2.1.2), nous obtenons les équations suivantes :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_-^0}{\partial \hat{\nu}^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_-^1}{\partial \hat{\nu}^2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k \left[\frac{\partial^2 u_-^k}{\partial \hat{s}^2} + \frac{\partial^2 u_-^{k+2}}{\partial \hat{\nu}^2} + \omega^2 u_-^k \right] = -\mathbf{f} \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_- \quad (2.2.2-(i))$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_+^0}{\partial \hat{\nu}^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_+^1}{\partial \hat{\nu}^2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k \left[\frac{\partial^2 u_+^k}{\partial \hat{s}^2} + \frac{\partial^2 u_+^{k+2}}{\partial \hat{\nu}^2} + \omega^2 u_+^k \right] = -\mathbf{f} \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_+ \quad (2.2.2-(ii))$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \Delta U^0 + \frac{1}{\varepsilon} \Delta U^1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k \left[\Delta U^{k+2} + \omega^2 U^k \right] = 0 \quad \text{dans } \widehat{J}_\alpha \quad (2.2.2-(iii))$$

avec les conditions de Neumann suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial u_-^k}{\partial \hat{\nu}} = 0, \quad \text{pour } -L_- < \hat{s} < 0 \text{ et } \hat{\nu} = \{-1, 0\}, \quad (2.2.3-(i))$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial u_+^k}{\partial \hat{\nu}} = 0, \quad \text{pour } 0 < \hat{s} < L_+ \text{ et } \hat{\nu} = \{-1, 0\}, \quad (2.2.3-(ii))$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial U^k}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{J}_\alpha \setminus (\Sigma_\alpha^- \cup \Sigma_\alpha^+); \quad (2.2.3-(iii))$$

auxquelles nous rajoutons les conditions d'onde sortante en $\hat{s} = \pm L_\pm$ et les conditions suivantes de continuité des traces sur Σ_α^\pm , dues au fait que la fonction u^ε est une fonction appartenant à $H^1(\Omega_\alpha^\varepsilon, \mathbb{C})$:

$$U^k = u_\pm^k \quad \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm, \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.2.4-(i))$$

$$\frac{\partial U^0}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \quad (2.2.4-(ii))$$

$$\frac{\partial U^{k+1}}{\partial n} = \pm \frac{\partial u_\pm^k}{\partial \hat{s}} \quad \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm, \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.2.4-(iii))$$

Les conditions (2.2.3, 2.2.4) ont été écrites en utilisant le fait que les fonctions intervenant dans l'hypothèse de développement 2.2.1 ne dépendent pas de ε .

2.2.1.2 Écriture du terme limite u^0

L'intégration du terme en ε^{-2} de (2.2.2-(i)) suivant $\hat{\nu}$, associée à la condition de Neumann (2.2.3-(i)) pour $k = 0$ donne $\frac{\partial u_-^0}{\partial \hat{\nu}} = 0$ à \hat{s} fixé, donc u_-^0 est une fonction ne dépendant que de \hat{s} . En intégrant

maintenant le terme en ε^0 de (2.2.2-(i)), en utilisant la condition de Neumann (2.2.3-(i)) pour $k = 2$ et en utilisant le fait que u_-^0 est une fonction indépendante pas de la variable $\hat{\nu}$, nous obtenons l'équation 1D suivante

$$\frac{\partial^2 u_-^0}{\partial s^2} + \omega^2 u_-^0 = -\mathbf{f} \quad \text{pour } \hat{s} < 0$$

De la même manière, u_+^0 est une fonction qui ne dépend pas de la variable $\hat{\nu}$ et satisfait

$$\frac{\partial^2 u_+^0}{\partial s^2} + \omega^2 u_+^0 = -\mathbf{f} \quad \text{pour } \hat{s} > 0$$

Pour le terme de jonction U^0 , le terme en ε^{-2} de (2.2.2-(iii)) associé aux conditions de Neumann (2.2.3-(iii), 2.2.4-(ii)) nous donne que $U^0 \in H^1(\hat{J}_\alpha, \mathbb{C})$ est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta U^0 = 0 & \text{dans } \hat{J}_\alpha \\ \frac{\partial U^0}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \hat{J}_\alpha \end{cases}$$

Le théorème de Lax-Milgram nous donne alors U^0 constante sur \hat{J}_α . En utilisant alors les conditions de raccord de Dirichlet (2.2.4-(i)), nous obtenons

$$u_-^0(0) = u_+^0(0)$$

Enfin, le terme en ε^{-1} de (2.2.2-(iii)) associé à la condition de Neumann (2.2.3-(iii)) et aux conditions de raccord (2.2.4-(iii)) pour $k = 0$ nous donne que $U^1 \in H^1(\hat{J}_\alpha, \mathbb{C})$ est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta U^1 = 0 & \text{dans } \hat{J}_\alpha \\ \frac{\partial U^1}{\partial n} = \pm \frac{\partial u_\pm^0}{\partial \hat{s}}(0) & \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \\ \frac{\partial U^1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \hat{J}_\alpha \setminus (\Sigma_\alpha^- \cup \Sigma_\alpha^+) \end{cases} \quad (2.2.5)$$

La condition de compatibilité pour le système (2.2.5) est

$$\int_{\hat{J}_\alpha} \Delta U^1 = \int_{\partial \hat{J}_\alpha} \frac{\partial U^1}{\partial n}$$

ce qui nous donne

$$\frac{\partial u_-^0}{\partial \hat{s}}(0) = \frac{\partial u_+^0}{\partial \hat{s}}(0) \quad (2.2.6)$$

Finalement, il est facile d'observer que u^0 est la même fonction (au changement de variable près) que la solution du problème limite (2.1.24).

2.2.1.3 Contradiction sur l'écriture du terme u^1

En tentant d'écrire le terme u^0 , nous avons dû utiliser une information sur le problème (2.2.5) satisfait par la fonction de jonction U^1 . Mais d'autre part, à cause des conditions de raccord (2.2.4-(i)), nous avons U^1 constante sur Σ_α^\pm . Comme nous pouvons raisonnablement pas imposer $\frac{\partial u_-^0}{\partial \hat{s}}(0) = 0$, et

en utilisant la condition de continuité (2.2.6), nous pouvons écrire $U^1 = \frac{\partial u^0}{\partial \bar{s}}(0)W$, où W est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta W = 0 & \text{dans } \widehat{J}_\alpha \\ \frac{\partial W}{\partial n} = \pm 1 & \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \\ \frac{\partial W}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \widehat{J}_\alpha \setminus (\Sigma_\alpha^- \cup \Sigma_\alpha^+) \\ W \text{ est constant} & \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Proposition 2.2.2. *Le problème (2.2.7) est mal posé.*

Démonstration. Appelons Σ_α^0 l'axe donné par $X + \tan(\alpha)Y = 0$ (cet axe est l'axe de symétrie de la figure 2.2 page 10). Nous allons chercher une solution W du problème (2.2.7) qui est à moyenne nulle sur \widehat{J}_α . Si on appelle Ξ_Σ la symétrie d'axe Σ_α^0 , nous pouvons voir que la fonction $W \circ \Xi_\Sigma$ est aussi à moyenne nulle et est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta W \circ \Xi_\Sigma = 0 & \text{dans } \widehat{J}_\alpha \\ \frac{\partial W \circ \Xi_\Sigma}{\partial n} = \mp 1 & \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \\ \frac{\partial W \circ \Xi_\Sigma}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \widehat{J}_\alpha \setminus (\Sigma_\alpha^- \cup \Sigma_\alpha^+) \\ W \circ \Xi_\Sigma \text{ est constant} & \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \end{cases}$$

Nous obtenons alors $W \circ \Xi_\Sigma = -W$, donc la fonction W est antisymétrique par rapport à Σ_α^0 . En particulier, les traces de W sur Σ_α^- et Σ_α^+ sont constantes opposées. Or, le fait que W soit constante sur Σ_α^- et Σ_α^+ et le fait que W soit une fonction $H^1(\widehat{J}_\alpha, \mathbb{C})$ imposent que ces traces soient égales. Nous en déduisons alors $W = 0$ sur Σ_α^\pm . W est alors solution du problème

$$\begin{cases} \Delta W = 0 & \text{dans } \widehat{J}_\alpha \\ W = 0 & \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \\ \frac{\partial W}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \widehat{J}_\alpha \setminus (\Sigma_\alpha^- \cup \Sigma_\alpha^+) \end{cases}$$

En utilisant de nouveau le théorème de Lax-Milgram, nous en déduisons $W = 0$, ce qui est incompatible avec la seconde ligne de (2.2.7).

Maintenant, si il existe une solution \tilde{W} de (2.2.7) qui ne soit pas à moyenne nulle, nous posons

$$W = \tilde{W} - \left(\int_{\widehat{J}_\alpha} \tilde{W} d\widehat{\mathbf{x}} \right) \left(\int_{\widehat{J}_\alpha} d\widehat{\mathbf{x}} \right)^{-1}$$

W est alors une fonction à moyenne nulle qui satisfait (2.2.7), donc ne peut pas exister, donc \tilde{W} non plus. \square

La conclusion de cette section est que nous ne pouvons pas coller brutalement une fonction 1D à une fonction 2D. Nous devons faire un raccord "1D-2D" : c'est l'objectif des sections suivantes.

2.2.2 Décomposition de domaines avec recouvrement

2.2.2.1 Découpage géométriques

Dans la suite, nous notons \mathcal{C} la classe des fonctions continues positives de la variable $\varepsilon > 0$ qui tendent vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$, mais moins rapidement que $\varepsilon|\ln(\varepsilon)|$ (un exemple typique est la fonction $\varepsilon \mapsto \varepsilon^\beta$, avec $\beta < 1$) :

$$\mathcal{C} = \left\{ \varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon) = 0 \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon|\ln(\varepsilon)|} = +\infty \right\} \quad (2.2.8)$$

Étant donné $\varphi \in \mathcal{C}$, nous définissons les deux fentes par

$$\Omega_\pm(\varepsilon) = \{ \mathbf{x} \in \Omega_\alpha^\varepsilon / \varphi(\varepsilon) < \pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^\pm < L_\pm, -\varepsilon < \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\pm < 0 \} \quad (\subset \Omega_\pm^\varepsilon) \quad (2.2.9)$$

et la zone de jonction par

$$J_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon \hat{J}_\alpha \cup \bigcup_{\pm} \{ \mathbf{x} \in \Omega_\alpha^\varepsilon / 0 < \pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^\pm < 2\varphi(\varepsilon), -\varepsilon < \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\pm < 0 \} \quad (\supset J_\alpha^\varepsilon) \quad (2.2.10)$$

de telle sorte que nous ayons toujours $\Omega_\alpha^\varepsilon = \Omega_-(\varepsilon) \cup \Omega_+(\varepsilon) \cup J_\alpha(\varepsilon)$ avec deux zones de recouvrement (voir figure 2.3) :

$$\mathcal{O}_\pm(\varepsilon) = \{ \mathbf{x} \in \Omega_\alpha^\varepsilon / \varphi(\varepsilon) < \pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^\pm < 2\varphi(\varepsilon), -\varepsilon < \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\pm < 0 \} \quad (2.2.11)$$

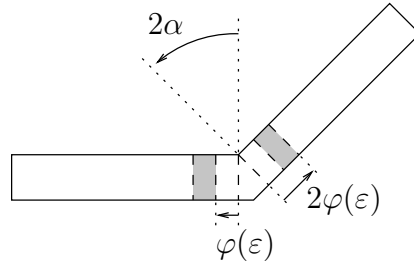


FIGURE 2.3 – Configuration des zones de recouvrement $\mathcal{O}_\pm(\varepsilon)$ (en grisé)

2.2.2.2 Changements de variables

De la même manière que dans la section 2.1.1, nous introduisons les changements de variables donnés par (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.6) :

- les domaines normalisés de fentes $\hat{\Omega}_\pm(\varepsilon) = (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1} \hat{\Omega}_\pm(\varepsilon)$ donnés par

$$\hat{\Omega}_-(\varepsilon) =]-L_-, -\varphi(\varepsilon)[\times]-1, 0[, \quad \hat{\Omega}_+(\varepsilon) =]\varphi(\varepsilon), L_+[\times]-1, 0[\quad (2.2.12)$$

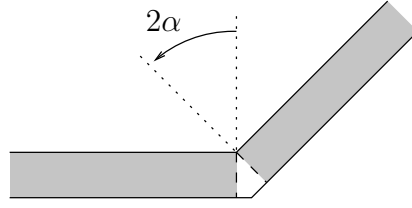
Notons que les domaines $\hat{\Omega}_\pm(\varepsilon)$ grandissent quand ε diminue et convergent vers les domaines $\hat{\Omega}_\pm$ lorsque ε tend vers 0.

- le domaine normalisé de jonction $\hat{J}_\alpha(\varepsilon)$ donné par

$$\hat{J}_\alpha(\varepsilon) = (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} J_\alpha(\varepsilon) \quad (2.2.13)$$

grandit également lorsque ε diminue, et tend, quand ε tend vers 0, vers le domaine non borné \hat{J}_α^∞ donné par (cf. figure 2.4) :

$$\hat{J}_\alpha^\infty = \hat{J}_\alpha \cup \hat{B}_- \cup \hat{B}_+ \quad (2.2.14)$$

FIGURE 2.4 – Configuration des fentes semi-infinies \widehat{B}_\pm (en grisé)

2.2.3 Développements asymptotiques et équations basiques

Nous formulons ici notre ansatz pour les développements asymptotiques qui consistent, dans chaque zone après scaling, à développer u^ε en puissance de $(\varepsilon\omega)$. En d'autres mots :

Hypothèse 2.2.3. Il existe des familles de fonctions $(u_-^k, u_+^k, U^k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^1(\widehat{\Omega}_-, \mathbb{C}) \times H^1(\widehat{\Omega}_+, \mathbb{C}) \times H_{\text{loc}}^1(\widehat{J}_\alpha^\infty, \mathbb{C})$ indépendantes de ε telles que

$$u^\varepsilon \circ \Xi_\pm^\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\varepsilon\omega)^k u_\pm^k + o((\varepsilon\omega)^\infty) \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_\pm(\varepsilon) \quad (2.2.15-(i))$$

$$u^\varepsilon \circ \Xi_J^\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\varepsilon\omega)^k U^k + o((\varepsilon\omega)^\infty) \quad \text{dans } \widehat{J}_\alpha(\varepsilon) \quad (2.2.15-(ii))$$

Il reste à obtenir les équations qui permettront de déterminer les fonctions u_\pm^k et U^k . Pour les fonctions u_\pm^k , nous substituons formellement (2.2.15-(i)) dans l'équation de Helmholtz 2D (2.1.2) une fois le changement de variable $(\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1}$ effectué, et nous identifions les termes avec la même puissance de ε (d'après l'hypothèse 2.2.3, les termes du développement ne dépendent pas de ε). Nous obtenons assez simplement

$$\frac{\partial^2 u_\pm^0}{\partial \hat{\nu}^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_\pm^1}{\partial \hat{\nu}^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_\pm^k}{\partial \hat{s}^2} + \omega^2 u_\pm^k + \omega^2 \frac{\partial^2 u_\pm^{k+2}}{\partial \hat{\nu}^2} = -\delta_{k,0} \mathbf{f}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.2.16)$$

où $\delta_{k,0}$ vaut 1 si $k = 0$, et 0 sinon ; et nous obtenons les conditions de bord "latérales" suivantes

$$\frac{\partial u_\pm^k}{\partial \hat{\nu}}(\hat{s}, -1) = \frac{\partial u_\pm^k}{\partial \hat{\nu}}(\hat{s}, 0) = 0, \quad \pm \hat{s} > 0, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.2.17)$$

Nous pouvons déjà donner un résultat partiel sur les familles de fonctions $(u_\pm^k)_{k \in \mathbb{N}}$:

Proposition 2.2.4. Soit $(u_-^k, u_+^k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^1(\widehat{\Omega}_-, \mathbb{C}) \times H^1(\widehat{\Omega}_+, \mathbb{C})$ satisfaisant (2.2.16) et (2.2.17) ; alors

$$u_\pm^k(\hat{s}, \hat{\nu}) = u_\pm^k(\hat{s}), \quad \pm \hat{s} \in]0, \pm L_\pm[, \quad \hat{\nu} \in]-1, 0[, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.2.18-(i))$$

$$-\frac{\partial^2 u_\pm^k}{\partial \hat{s}^2}(\hat{s}) - \omega^2 u_\pm^k(\hat{s}) = \delta_{k,0} \mathbf{f}, \quad \pm \hat{s} \in]0, \pm L_\pm[, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.2.18-(ii))$$

Remarque 2.2.5. Cette proposition nous dit qu'au lieu de définir $(u_-^k, u_+^k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^1(\widehat{\Omega}_-, \mathbb{C}) \times H^1(\widehat{\Omega}_+, \mathbb{C})$, on peut très bien définir $(u_-^k, u_+^k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^1(S_-, \mathbb{C}) \times H^1(S_+, \mathbb{C})$ comme étant des fonctions 1D.

Démonstration de la proposition 2.2.4. Nous allons démontrer simultanément les points (2.2.18-(i)) et (2.2.18-(ii)) par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. En fait, pour $k = 0, 1$, les deux premières équations de (2.2.16) combinées avec les conditions de bord (2.2.17) montrent que u_\pm^0 et u_\pm^1 sont indépendantes de $\hat{\nu}$. Ensuite,

en intégrant la troisième équation de (2.2.16) pour $k = 0$ (respectivement pour $k = 1$) par rapport à $\hat{\nu}$ (de -1 à 0), et en utilisant les conditions de bord (2.2.17) pour $k = 2$ (respectivement pour $k = 3$), nous voyons que u_{\pm}^0 (respectivement u_{\pm}^1) satisfait (2.2.18-(ii)).

Supposons que (2.2.18) soit vérifiée jusqu'à $k = p$. Alors en prenant (2.2.16) pour $k = p - 1$ avec les conditions de bord (2.2.17) pour $k = p + 1$, et en utilisant le fait que u_{\pm}^{p-1} satisfasse (2.2.18-(ii)), nous obtenons que u_{\pm}^{p+1} est une fonction indépendante de $\hat{\nu}$. Puis, en intégrant la troisième équation de (2.2.16) pour $k = p + 1$ et en utilisant les conditions de bord (2.2.17) pour $k = p + 3$, nous voyons que u_{\pm}^{p+1} satisfait (2.2.18-(ii)). \square

De plus, en injectant ce développement dans les conditions écrites aux bords $\Gamma_{\pm}^{\varepsilon}$ du problème (2.1.2), nous en déduisons

$$\frac{\partial u_{-}^k}{\partial \hat{s}}(-L_{-}) + \omega u_{-}^k(-L_{-}) = 0, \quad \frac{\partial u_{+}^k}{\partial \hat{s}}(L_{+}) - \omega u_{+}^k(L_{+}) = 0 \quad (2.2.19)$$

Pour obtenir les équations pour les termes U^k , nous substituons formellement le développement (2.2.15-(ii)) dans l'équation de Helmholtz 2D (2.1.2), nous effectuons le changement de variable $(\Xi_j^{\varepsilon})^{-1}$, et nous identifions les termes avec la même puissance de ε . Nous voyons alors que la famille des fonctions U^k satisfait des équations de Laplace emboîtées

$$\Delta U^0 = 0, \quad \Delta U^1 = 0, \quad \Delta U^k + U^{k-2} = 0, \quad k \geq 2, \quad \text{dans } \hat{J}_{\alpha}^{\infty} \quad (2.2.20)$$

avec les conditions de Neumann suivantes

$$\frac{\partial U^k}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \hat{J}_{\alpha}^{\infty}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.2.21)$$

Remarque 2.2.6. Dans tout ce qui va suivre, nous adopterons la convention que toutes les quantités super-indexées par k (comme u_{\pm}^k , U^k , ...) sont nulles pour les valeurs négatives de k . Cette notation sera utile pour simplifier plusieurs formules. Par exemple avec cette convention la dernière équation de (2.2.20) est également valide pour $k = 0$ et $k = 1$.

2.2.4 Conditions de raccord

Nous ne pouvons pas encore caractériser entièrement les familles $(u_{\pm}^k, U^k)_{k \in \mathbb{N}}$: il nous manque des conditions en $\hat{s} = 0$ pour les fonctions u_{\pm}^k et des conditions à l'infini pour les fonctions U^k . Ces conditions, qui seront données par les conditions de raccord, vont coupler les fonctions u_{\pm}^k et les fonctions U^k . Pour écrire ces conditions de raccord, il est utile de connaître la forme des fonctions U^k dans les deux fentes semi-infinies \hat{B}_{\pm} : c'est l'objectif de la prochaine section.

2.2.4.1 Écriture modale des solutions des équations de Laplace emboîtées

Dans \hat{B} , nous utilisons les coordonnées locales $(\hat{s}, \hat{\nu}) = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}^{\pm}, \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}^{\pm})$ de telle manière que

$$\hat{\mathbf{x}} \in \hat{B}_{\pm} \iff (\pm \hat{s}, \hat{\nu}) \in]0, +\infty[\times]-1, 0[\quad (2.2.22)$$

Considérons $(U_{\pm}^k)_{k \geq 0} \in H_{\text{loc}}^1(\hat{B}_{\pm}, \mathbb{C})$ solution des équations de Laplace emboîtées suivantes

$$\Delta U_{\pm}^0 = 0, \quad \Delta U_{\pm}^1 = 0, \quad \Delta U_{\pm}^{k+2} + U_{\pm}^k = 0, \quad \text{dans } \hat{B}_{\pm}, \quad \frac{\partial U_{\pm}^k}{\partial \hat{\nu}} = 0, \quad \text{pour } \hat{\nu} = \{-1, 0\}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.2.23)$$

Dans la section suivante, les résultats de cette section seront appliqués aux restrictions des fonctions U^k sur les domaines \widehat{B}_\pm , où U^k sont les coefficients du développement (2.2.15-(ii)).

Le comportement des fonctions U_\pm^k dans les deux fentes semi-infinies \widehat{B}_\pm est facilement décrit en utilisant la séparation de variables dans les coordonnées (\hat{s}, \hat{v}) . Cette séparation de variables fait introduire naturellement la base de fonctions w_p définie par

$$w_0(\hat{v}) = 1, \quad w_p(\hat{v}) = \sqrt{2} \cos(p\pi\hat{v}), \quad p \geq 1 \quad (2.2.24)$$

Cette base de fonctions est une base de fonctions propres du Laplacien 1D (en \hat{v}) adaptée aux conditions de Neumann en $\hat{v} = \{-1, 0\}$: il existe des fonctions $U_{\pm,p}^k$ ne dépendant que de \hat{s} telles que

$$U_\pm^k(\hat{s}, \hat{v}) = \sum_{p \in \mathbb{N}} U_{\pm,p}^k(\hat{s}) w_p(\hat{v}) \quad \text{avec} \quad U_{\pm,p}^k(\hat{s}) = \int_{-1}^0 U_\pm^k(\hat{s}, \hat{v}) w_p(\hat{v}) d\hat{v} \quad (2.2.25)$$

Si nous substituons formellement (2.2.25) dans (2.2.23), nous avons

$$\forall k \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^2 U_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}^2} - (p\pi)^2 U_{\pm,p}^k = 0 \quad (2.2.26-(i))$$

$$\forall k \geq 2, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^2 U_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}^2} - (p\pi)^2 U_{\pm,p}^k + U_{\pm,p}^{k-2} = 0 \quad (2.2.26-(ii))$$

La résolution de (2.2.26) est un exercice simple mais fastidieux de résolution d'équations différentielles ordinaires. Dans ce qui va suivre, nous allons reproduire quelques résultats de [JT06] et [JS08], que nous présentons de manière plus adaptée à notre cas de figure. En regardant ce qui se passe pour $k = 0$ ou $k = 1$, il est assez naturel d'introduire les changements de fonctions inconnues

$$U_{\pm,p}^k(\hat{s}, \hat{v}) = \exp(p\pi\hat{s}) V_{\pm,p}^k(\hat{s}, \hat{v}) \quad \text{et} \quad U_{\pm,p}^k(\hat{s}, \hat{v}) = \exp(-p\pi\hat{s}) W_{\pm,p}^k(\hat{s}, \hat{v})$$

nous obtenons les systèmes d'équations suivantes (avec la convention de la remarque 2.2.6) :

$$\frac{\partial^2 V_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}^2} + 2p\pi \frac{\partial V_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}} - (p\pi)^2 V_{\pm,p}^k + V_{\pm,p}^{k-2} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (2.2.27-(i))$$

$$\frac{\partial^2 W_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}^2} - 2p\pi \frac{\partial W_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}} - (p\pi)^2 W_{\pm,p}^k + W_{\pm,p}^{k-2} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (2.2.27-(ii))$$

Nous allons maintenant chercher des solutions polynômiales de (2.2.27) que nous appellerons $c_{\pm,p}^k$ et $d_{\pm,p}^k$, qui seront définies par récurrence sur k et qui seront identiquement nulles pour k impair (nous faisons ce choix car la forme des équations (2.2.27) nous suggère le même type de comportement pour V^{2k} et V^{2k+1}).

- La valeur $p = 0$ est une valeur particulière, puisque les deux équations (2.2.27-(i)) et (2.2.27-(ii)) sont les mêmes. Pour $k = 0, 1$, nous avons

$$c_{\pm,0}^0(\hat{s}) = \imath \hat{s}, \quad c_{\pm,0}^1(\hat{s}) = 0, \quad d_{\pm,0}^0(\hat{s}) = 1, \quad d_{\pm,0}^1(\hat{s}) = 0 \quad (2.2.28)$$

et pour $k \geq 2$, nous avons

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 c_{\pm,0}^k}{\partial \hat{s}^2} = -c_{\pm,0}^{k-2}, \quad c_{\pm,0}^k(0) = \frac{\partial c_{\pm,0}^k}{\partial \hat{s}}(0) = 0, \\ \frac{\partial^2 d_{\pm,0}^k}{\partial \hat{s}^2} = -d_{\pm,0}^{k-2}, \quad d_{\pm,0}^k(0) = \frac{\partial d_{\pm,0}^k}{\partial \hat{s}}(0) = 0, \end{array} \right. \quad (2.2.29)$$

Il est facile de voir, pour k pair, que les solutions de (2.2.29) sont (nous retrouvons les monômes du développement de Taylor de la fonction $\hat{s} \mapsto \exp(i\hat{s})$) :

$$c_{\pm,0}^{2m} = \frac{(i\hat{s})^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad d_{\pm,0}^{2m} = \frac{(i\hat{s})^{2m}}{(2m)!}, \quad (2.2.30)$$

- Pour $p \geq 1$, nous partons de

$$c_{\pm,p}^0(\hat{s}) = 1, \quad c_{\pm,p}^1(\hat{s}) = 0, \quad d_{\pm,p}^0(\hat{s}) = 1, \quad d_{\pm,p}^1(\hat{s}) = 0, \quad p \geq 1 \quad (2.2.31)$$

Puis, pour $k \geq 2$, $(c_{\pm,p}^k, d_{\pm,p}^k)$ est définie comme étant la solution polynômiale de

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 c_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}^2} \pm 2p\pi \frac{\partial c_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}} = -c_{\pm,p}^{k-2}, \quad c_{\pm,p}^k(0) = 0, \\ \frac{\partial^2 d_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}^2} \mp 2p\pi \frac{\partial d_{\pm,p}^k}{\partial \hat{s}} = -d_{\pm,p}^{k-2}, \quad d_{\pm,p}^k(0) = 0, \end{array} \right. \quad (2.2.32)$$

Notons la différence entre les deux lignes de (2.2.32)

Proposition 2.2.7. Soit $(c_{\pm,p}^k, d_{\pm,p}^k)_{p \geq 1, k \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes satisfaisant (2.2.31, 2.2.32); alors

1. Cette famille est bien définie et est unique,
2. $c_{\pm,p}^{2m}$ et $d_{\pm,p}^{2m}$ sont de degré m ,
3. $c_{\pm,p}^{2m+1}$ et $d_{\pm,p}^{2m+1}$ sont identiquement nulles,
4. nous avons les relations suivantes reliant $c_{\pm,p}^k$ et $d_{\pm,p}^k$:

$$d_{\pm,p}^k(\hat{s}) = c_{\pm,p}^k(-\hat{s}) = d_{\mp,p}^k(-\hat{s}) \quad (2.2.33)$$

5. nous avons les relations suivantes reliant $d_{\pm,p}^k$ et $d_{\pm,1}^k$:

$$d_{\pm,p}^k(\hat{s}) = p^{-k} d_{\pm,1}^k(p\hat{s}) \quad (2.2.34)$$

Démonstration. Nous avons 5 points à démontrer. Nous allons démontrer simultanément les trois premiers points, en étudiant le noyau de l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \hat{s}^2} \pm 2\pi p \frac{\partial u}{\partial \hat{s}} \quad (2.2.35)$$

et en montrant qu'il existe une unique solution polynômiale de degré $m+1$ à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \hat{s}^2} \pm 2\pi p \frac{\partial u}{\partial \hat{s}} = s^m, \quad u(0) = 0 \quad (2.2.36)$$

En regardant le noyau de (2.2.35), nous voyons qu'il existe deux constantes $(a, b) \in \mathbb{C}$ telles que

$$u(\hat{s}) = a \exp(\mp 2p\pi \hat{s}) + b \quad (2.2.37)$$

En particulier, si nous cherchons une fonction polynômiale qui soit dans le noyau, cette fonction est constante. De ce constat, si nous appelons u et v deux solutions polynômiales de (2.2.36), alors $u - v$ est polynômiale, appartient au noyau de l'opérateur (2.2.35), et est nulle en $\hat{s} = 0$. Nous en déduisons

$u - v \equiv 0$, donc si le problème (2.2.36) a une solution, elle est unique. Nous allons maintenant exhiber cette solution : soit $\mathbf{c}_{\pm,p}^m$ une fonction polynômiale de la forme

$$\mathbf{c}_{\pm,p}^m = \sum_{l=1}^{m+1} a_{l,\pm,m}^p s^l \quad (2.2.38)$$

où $a_{l,\pm,m}^p \in \mathbb{C}$. En injectant (2.2.38) dans (2.2.36), nous obtenons

$$\sum_{l=0}^{m-1} (l+1) \left((l+2)a_{l+2,\pm,m}^p \pm 2p\pi a_{l+1,\pm,m}^p \right) s^l \pm 2p\pi a_{m+1,\pm,m}^p s^m = s^m \quad (2.2.39)$$

En indentifiant les coefficients de (2.2.39), nous obtenons

$$\left| \begin{array}{l} a_{m+1,\pm,m}^p = \pm \frac{1}{2p\pi} \\ a_{l,\pm,m}^p = \mp \frac{(l+1)a_{l+1,\pm,m}^p}{2p\pi}, \quad 1 \leq l \leq m \end{array} \right. \quad (2.2.40)$$

Pour les deux derniers points, nous utilisons la forme des coefficients trouvés dans (2.2.40). \square

Une fois ces familles de polynômes construites, nous construisons les familles de fonctions $\mathbf{c}_{\pm,p}^k$, $\mathbf{d}_{\pm,p}^k$ de \widehat{B}_{\pm} dans \mathbb{C} de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{c}_{\pm,p}^k(\hat{s}, \hat{v}) = \exp(\pm p\pi \hat{s}) c_{\pm,p}^k(\hat{s}) w_p(\hat{v}), \\ \mathbf{d}_{\pm,p}^k(\hat{s}, \hat{v}) = \exp(\mp p\pi \hat{s}) d_{\pm,p}^k(\hat{s}) w_p(\hat{v}), \end{array} \right. \quad (2.2.41)$$

qui constituent des familles particulières de solutions des équations de Laplace embarquées suivantes

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \Delta \mathbf{c}_{\pm,p}^k = -\mathbf{c}_{\pm,p}^{k-2}, \quad \mathbf{d}_{\pm,p}^k = -\mathbf{d}_{\pm,p}^{k-2}, \quad \text{dans } \widehat{B}_{\pm} \quad (2.2.42)$$

avec des conditions de Neumann homogènes en $\hat{v} = \{-1, 0\}$.

Remarque 2.2.8. Nous pouvons voir que pour $p \geq 1$, la famille des fonctions \mathbf{c}_{\pm} est exponentiellement croissante que $\hat{s} \rightarrow \pm\infty$, alors que la famille des fonctions \mathbf{d}_{\pm} est exponentiellement décroissante que $\hat{s} \rightarrow \pm\infty$. Cette propriété sera utilisée lors de l'écriture des conditions de raccord.

Le lemme suivant explique alors que la famille de fonctions introduite ci-dessus est suffisante pour décrire le comportement des fonctions U_{\pm}^k :

Lemme 2.2.9 (Lemme fondamental de développement des U_{\pm}^k). *Soit $\{U_{\pm}^k \in H_{loc}^1(\widehat{B}_{\pm})$, $k \in \mathbb{N}\}$ une famille de fonctions satisfaisant (2.2.23), il existe alors deux suites de nombres complexes $(\gamma_{\pm,p}^k)_{(p,k) \in \mathbb{N}^2}$ et $(\delta_{\pm,p}^k)_{(p,k) \in \mathbb{N}^2}$ telles que*

$$U_{\pm}^k = \sum_{m=0}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\gamma_{\pm,p}^{k-m} \mathbf{c}_{\pm,p}^m + \delta_{\pm,p}^{k-m} \mathbf{d}_{\pm,p}^m \right) \quad (\text{dans } H_{loc}^1(\widehat{B}_{\pm})) \quad (2.2.43)$$

Démonstration. Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur k . Tout d'abord, nous pouvons remarquer que le résultat est vrai pour $k = 0$ et pour $k = 1$ (les fonctions harmoniques dans \widehat{B}_{\pm} qui satisfont les conditions de Neumann homogènes en $\hat{v} = \{-1, 0\}$ sont combinaisons linéaires des

fonctions $\mathbf{c}_{\pm,0}^0$ et $\mathbf{d}_{\pm,0}^0$). Supposons que nous ayons construit les familles $\gamma_{\pm,p}^l$ et $\delta_{\pm,p}^l$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $l \leq k-1$. Introduisons alors (nous rappelons que par convention, $\mathbf{c}_{\pm,p}^1 = \mathbf{d}_{\pm,p}^1 = 0$) :

$$U_{\pm}^{k,*} = \sum_{m=1}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\gamma_{\pm,p}^{k-m} \mathbf{c}_{\pm,p}^m + \delta_{\pm,p}^{k-m} \mathbf{d}_{\pm,p}^m \right) = \sum_{m=2}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\gamma_{\pm,p}^{k-m} \mathbf{c}_{\pm,p}^m + \delta_{\pm,p}^{k-m} \mathbf{d}_{\pm,p}^m \right)$$

Nous obtenons alors (nous utilisons successivement (2.2.42) et le changement d'indice $m \rightarrow m-2$) :

$$\begin{aligned} \Delta U_{\pm}^{k,*} &= \sum_{m=2}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\gamma_{\pm,p}^{k-m} \Delta \mathbf{c}_{\pm,p}^m + \delta_{\pm,p}^{k-m} \Delta \mathbf{d}_{\pm,p}^m \right) \\ &= \sum_{m=2}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\gamma_{\pm,p}^{k-m} \mathbf{c}_{\pm,p}^{m-2} + \delta_{\pm,p}^{k-m} \mathbf{d}_{\pm,p}^{m-2} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{k-2} \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\gamma_{\pm,p}^{k-2-m} \mathbf{c}_{\pm,p}^m + \delta_{\pm,p}^{k-2-m} \mathbf{d}_{\pm,p}^m \right) = -U_{\pm}^{k-2} \end{aligned}$$

La fonction $U_{\pm}^k - U_{\pm}^{k,*}$ étant donc harmonique sur \widehat{B}_{\pm} , nous savons donc qu'il existe deux suites de nombres complexes, que nous choisissons d'appeler respectivement $(\gamma_{\pm,p}^k)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\delta_{\pm,p}^k)_{p \in \mathbb{N}}$ telles que

$$U_{\pm}^k - U_{\pm}^{k,*} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\gamma_{\pm,p}^k \mathbf{c}_{\pm,p}^0 + \delta_{\pm,p}^k \mathbf{d}_{\pm,p}^0 \right)$$

et la preuve est complète. \square

Nous pouvons formaliser les résultats du lemme 2.2.9 en introduisant les espaces vectoriels

$$\mathcal{V}^k(\widehat{B}_{\pm}) = \text{vect} \{ (\mathbf{c}_{\pm,p}^m, \mathbf{d}_{\pm,p}^m), \quad p \in \mathbb{N}, \quad m \leq k \}, \quad \mathcal{V}(\widehat{B}_{\pm}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}^k(\widehat{B}_{\pm}) \quad (2.2.44)$$

et les formes linéaires $\mathcal{U}_{\pm} \in \mathcal{V}(\widehat{B}_{\pm}) \rightarrow \mathcal{N}_{\pm,p}^m(\mathcal{U}_{\pm}) \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{U}_{\pm} \in \mathcal{V}(\widehat{B}_{\pm}) \rightarrow \mathcal{D}_{\pm,p}^m(\mathcal{U}_{\pm}) \in \mathbb{C}$ telles que

$$\forall \mathcal{U}_{\pm} \in \mathcal{V}^k(\widehat{B}_{\pm}), \quad \mathcal{U}_{\pm} = \sum_{m=0}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{N}_{\pm,p}^{k-m}(\mathcal{U}_{\pm}) \mathbf{c}_{\pm,p}^m + \mathcal{D}_{\pm,p}^{k-m}(\mathcal{U}_{\pm}) \mathbf{d}_{\pm,p}^m \right) \quad (2.2.45)$$

Dans ce qui va suivre, la valeur $m=0$ jouera un rôle particulier et c'est pourquoi nous notons

$$\forall \mathcal{U}_{\pm} \in \mathcal{V}(\widehat{B}_{\pm}), \quad \mathcal{N}_{\pm,p}(\mathcal{U}_{\pm}) := \mathcal{N}_{\pm,p}^0(\mathcal{U}_{\pm}), \quad \mathcal{D}_{\pm,p}(\mathcal{U}_{\pm}) := \mathcal{D}_{\pm,p}^0(\mathcal{U}_{\pm}) \quad (2.2.46)$$

Avec ces notations, le lemme 2.2.9 peut être réinterprété de la manière suivante :

Corollaire 2.2.10. *Soit $\{U_{\pm}^k \in \mathbf{H}_{loc}^1(\widehat{B}_{\pm}), \quad k \in \mathbb{N}\}$ une famille de fonctions satisfaisant (2.2.23), alors*

$$U_{\pm}^k \in \mathcal{V}^k(\widehat{B}_{\pm}) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_{\pm,p}^m(U_{\pm}^k) = \mathcal{N}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-m}), \quad \mathcal{D}_{\pm,p}^m(U_{\pm}^k) = \mathcal{D}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-m}) \quad (2.2.47)$$

et nous avons comme conséquence

$$U_{\pm}^k = \sum_{m=0}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{N}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-m}) \mathbf{c}_{\pm,p}^m + \mathcal{D}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-m}) \mathbf{d}_{\pm,p}^m \right) \quad (\text{dans } \mathbf{H}_{loc}^1(\widehat{B}_{\pm})) \quad (2.2.48)$$

Nous pouvons donner une définition plus explicite des opérateurs $\mathcal{N}_{\pm,0}$ et $\mathcal{D}_{\pm,0}$, qui peuvent être réinterprétés comme des opérateurs de trace “moyenne” de Neumann ou de Dirichlet en $\hat{s} = 0$.

Lemme 2.2.11.

$$\forall \mathcal{U}_{\pm} \in \mathcal{V}(\widehat{B}_{\pm}), \quad \mathcal{D}_{\pm,0}(\mathcal{U}_{\pm}) = \int_{-1}^0 \mathcal{U}_{\pm}(0, \hat{\nu}) d\hat{\nu}, \quad \mathcal{N}_{\pm,0}(\mathcal{U}_{\pm}) = \frac{1}{i} \int_{-1}^0 \frac{\partial \mathcal{U}_{\pm}}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) d\hat{\nu} \quad (2.2.49)$$

Démonstration. En intégrant (2.2.45) par rapport à $\hat{\nu}$, nous avons

$$\forall \mathcal{U}_{\pm} \in \mathcal{V}^k(\widehat{B}_{\pm}), \quad \int_{-1}^0 \mathcal{U}_{\pm}(\hat{s}, \hat{\nu}) d\hat{\nu} = \sum_{m=0}^k \left(\mathcal{N}_{\pm,0}^{k-m}(\mathcal{U}_{\pm}) \mathbf{c}_{\pm,0}^m(\hat{s}) + \mathcal{D}_{\pm,0}^{k-m}(\mathcal{U}_{\pm}) \mathbf{d}_{\pm,0}^m(\hat{s}) \right) \quad (2.2.50)$$

Pour $\hat{s} = 0$, cette égalité donne la première relation de (2.2.49), grâce à (2.2.28), (2.2.30) et (2.2.46). Pour la seconde relation de (2.2.49), nous dérivons d’abord (2.2.50) par rapport à \hat{s} et prenons $\hat{s} = 0$, et nous utilisons de nouveau (2.2.28), (2.2.30) et (2.2.46). \square

De plus, pour les fonctions qui appartiennent au noyau des formes linéaires $\mathcal{N}_{\pm,p}^k$ pour $p \geq 1$, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.12. Soit $\mathcal{V}_0(\widehat{B}_{\pm}) := \{\mathcal{U} \in \mathcal{V}(\widehat{B}_{\pm}) / \forall p \geq 1, \forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_{\pm,p}^k(\mathcal{U}) = 0\}$. Alors

$$\forall \mathcal{U}_{\pm} \in \mathcal{V}_0(\widehat{B}_{\pm}), \mathcal{D}_{\pm,p}(\mathcal{U}) = \int_{-1}^0 \mathcal{U}_{\pm}(0, \hat{\nu}) w_p(\hat{\nu}) d\hat{\nu} \quad (2.2.51)$$

Démonstration. La preuve de ce lemme est similaire à la preuve du lemme 2.2.11, excepté que nous multiplions d’abord (2.2.45) par w_p avant d’intégrer par rapport à $\hat{\nu}$. Nous utilisons également (2.2.31) et (2.2.32), et le fait que $\mathcal{U}_{\pm} \in \mathcal{V}_0(\widehat{B}_{\pm})$. \square

2.2.4.2 Dérivation des conditions de raccord

Pour dériver les conditions de raccord, nous écrivons simplement que les deux développements (2.2.15-(i)), (2.2.15-(ii)) doivent coïncider (au moins formellement) dans les zones de recouvrement (2.2.11), i.e. en notant U_{\pm}^k la restriction de U^k à la fente semi-infinie \widehat{B}_{\pm} :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (\varepsilon \omega)^k U_{\pm}^k(\hat{s}/\varepsilon, \hat{\nu}/\varepsilon) + o((\varepsilon \omega)^{\infty}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\varepsilon \omega)^k u_{\pm}^k(\hat{s}, \hat{\nu}/\varepsilon) + o((\varepsilon \omega)^{\infty}), \quad \text{dans } \mathcal{O}_{\pm}(\varepsilon) \quad (2.2.52)$$

Nous notons respectivement \mathcal{L} et \mathcal{R} le membre de gauche et le membre de droite de (2.2.52). Nous allons commencer par \mathcal{R} qui est le plus simple à écrire : puisque dans la zone de recouvrement, $\pm \hat{s} < 2\varphi(\varepsilon)$ et $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (première des deux conditions limites sur φ donné par (2.2.8)), nous allons utiliser un développement de Taylor en $\hat{s} = 0$ pour chaque fonction u_{\pm}^k :

$$\mathcal{R} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\varepsilon \omega)^k \hat{s}^m \frac{1}{m!} \frac{\partial^m u_{\pm}^k}{\partial \hat{s}^m}(0) + o((\varepsilon \omega)^{\infty}) \quad (2.2.53)$$

Pour \mathcal{L} , nous utilisons les développements (2.2.48) du corollaire 2.2.10, et nous obtenons, en utilisant

le fait que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^k = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq m}$ au moins formellement :

$$\mathcal{L} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq m} (\varepsilon \omega)^k \left(\mathcal{N}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-m}) \mathbf{c}_{\pm,p}^m(\hat{s}/\varepsilon, \hat{\nu}/\varepsilon) + \mathcal{D}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-m}) \mathbf{d}_{\pm,p}^m(\hat{s}/\varepsilon, \hat{\nu}/\varepsilon) \right) + o((\varepsilon \omega)^{\infty})$$

Puisque pour $p \geq 1$, les fonctions $\mathbf{d}_{\pm,p}^k$ sont exponentiellement décroissantes à l'infini et puisque nous avons $\hat{s}/\varepsilon \geq \varphi(\varepsilon)/\varepsilon$, avec $\ln(\varepsilon) = o(\varphi(\varepsilon)/\varepsilon)$ (seconde limite de (2.2.8)), les termes correspondants dans la somme précédente peuvent être "mis dans" le terme $o((\varepsilon\omega)^\infty)$. Pour les termes restants de la somme, nous distinguons les termes pour $p = 0$, pour lesquels (nous pouvons utiliser les formules données par (2.2.30), des termes correspondant à $p \geq 1$ (qui sont exponentiellement croissants à l'infini) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{m' \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq 2m'} (\varepsilon\omega)^k \mathcal{N}_{\pm}(U_{\pm}^{k-2m'}) \frac{(\imath\hat{s}/\varepsilon)^{2m'+1}}{(2m'+1)!} + \sum_{m' \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq 2m'} (\varepsilon\omega)^k \mathcal{D}_{\pm}(U_{\pm}^{k-2m'}) \frac{(\imath\hat{s}/\varepsilon)^{2m'}}{(2m')!} \\ &+ \sum_{p \geq 1} \sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq m} (\varepsilon\omega)^k \mathcal{N}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-m}) \mathbf{c}_{\pm,p}^m(\hat{s}/\varepsilon, \hat{\nu}/\varepsilon) + o((\varepsilon\omega)^\infty) \end{aligned}$$

Nous faisons maintenant les changements d'indices $k \rightarrow k + 2m' + 1$ pour la première somme et $k \rightarrow k + 2m'$ pour la seconde somme, et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{m' \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq -1} (\varepsilon\omega)^k \mathcal{N}_{\pm}(U_{\pm}^{k+1}) \frac{(\imath\omega\hat{s})^{2m'+1}}{(2m'+1)!} + \sum_{m' \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq 0} (\varepsilon\omega)^k \mathcal{D}_{\pm}(U_{\pm}^k) \frac{(\imath\omega\hat{s})^{2m'}}{(2m')!} \\ &+ \sum_{p \geq 1} \sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq m} (\varepsilon\omega)^k \mathcal{N}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-m}) \mathbf{c}_{\pm,p}^m(\hat{s}/\varepsilon, \hat{\nu}/\varepsilon) + o((\varepsilon\omega)^\infty) \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

Finalement, l'identification formelle des deux expressions (2.2.53) et (2.2.54) dans les zones de recouvrement $\mathcal{O}_{\pm}(\varepsilon)$ comme étant des fonctions de ε , \hat{s} et $\hat{\nu}$ nous donne les conditions de raccord.

Tout d'abord, pour $p \geq 1$, après avoir multiplié (2.2.53) et (2.2.54) par $w_p(\hat{\nu})$ et intégré suivant $\hat{\nu}$, nous avons

$$\sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq m} (\varepsilon\omega)^k \mathcal{N}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-m}) \mathbf{c}_{\pm,p}^m(\hat{s}/\varepsilon, \hat{\nu}/\varepsilon) \exp(\pm p\pi\hat{s}/\varepsilon) = 0$$

La proposition 2.2.7 implique que les fonctions $\mathbf{c}_{\pm,p}^{2m'}$ sont linéairement indépendantes et nous en déduisons que $\mathcal{N}_{\pm,p}(U_{\pm}^{k-2m'}) = 0$ pour tout $m' \geq 0$ et pour tout $k \geq 0$, i.e. :

$$\mathcal{N}_{\pm,p}(U_{\pm}^k) = 0, \quad p \geq 1, \quad k \geq 0 \quad (2.2.55)$$

qui exprime l'absence de termes exponentiellement croissants. Nous pouvons voir que (2.2.55) se réécrit sous la forme suivante

$$U^k \text{ a une croissance au plus polynômiale à l'infini dans } \widehat{J}_\alpha^\infty \quad (2.2.56)$$

Ensuite, il revient d'identifier les termes en puissance de \hat{s} et de ε des deux développements. L'identification de ces termes en puissance de $((\varepsilon\omega))^k \hat{s}^m$, en distinguant les valeurs paires et impaires de m nous donne

$$(\imath\omega)^{2m'} \mathcal{D}_{\pm,0}(U_{\pm}^k) = \frac{\partial^{2m'} u_{\pm}^k}{\partial \hat{s}^{2m'}}(0), \quad (\imath\omega)^{2m'+1} \mathcal{N}_{\pm,0}(U_{\pm}^k) = \frac{\partial^{2m'+1} u_{\pm}^k}{\partial \hat{s}^{2m'+1}}(0), \quad m' \geq 0, \quad k \geq 0$$

En utilisant le fait que chaque fonction u_{\pm}^k est solution d'une équation de Helmholtz 1D, nous avons

$$\frac{1}{(\imath\omega)^{2m'}} \frac{\partial^{2m'} u_{\pm}^k}{\partial \hat{s}^{2m'}} = u_{\pm}^k$$

et en utilisant le lemme 2.2.11, nous obtenons les conditions de raccord de "Dirichlet" et de "Neumann" qui sont

$$\begin{cases} (\mathcal{D}) & u_{\pm}^k(0) = \int_{-1}^0 U_{\pm}^k(0, \hat{\nu}) d\hat{\nu}, \quad k \in \mathbb{N} \\ (\mathcal{N}) & \frac{\partial u_{\pm}^{k-1}}{\partial \hat{s}}(0) = \omega \int_{-1}^0 \frac{\partial U_{\pm}^k}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) d\hat{\nu}, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.2.57)$$

2.3 Justification des développements formels et estimations d'erreurs

Dans cette section, notre but est de prouver que les fonctions (u_-^k, u_+^k, U^k) sont définies de manière unique, et qu'il existe une fonction approchée construite à partir de ces développements qui diffère de la solution exacte d'une erreur étant une puissance de $(\varepsilon\omega)$ qui croît avec l'ordre de l'approximation que nous considérons.

2.3.1 Existence et unicité des développements formels

Notre but est de montrer que les équations (2.2.18, 2.2.19, 2.2.20, 2.2.21) associées aux conditions de raccord (2.2.57) et de croissance (2.2.55) définissent une famille unique

$$\left\{ (u_-^k, u_+^k, U^k) \in H^1(\widehat{\Omega}_-) \times H^1(\widehat{\Omega}_+) \times H_{\text{loc}}^1(\widehat{J}_\alpha^\infty), \quad k \in \mathbb{N} \right\}$$

Pour atteindre notre but, nous allons d'abord formuler un problème équivalent au problème (2.2.20, 2.2.21) mais posé sur la jonction canonique \widehat{J}_α . Cette formulation équivalente sera de plus utile pour les simulations numériques, qui seront détaillées dans le chapitre 4. Nous montrerons ensuite l'existence et l'unicité des termes du développement.

2.3.1.1 Restriction à un domaine borné pour les fonctions U^k

Notre but ici est de trouver une famille emboîtée de problèmes posés sur \widehat{J}_α dont la solution est la restriction des fonctions U^k au domaine \widehat{J}_α . Pour atteindre ce but, nous allons utiliser le développement modal des fonctions U^k donné par (2.2.48) afin d'écrire des opérateurs Dirichlet-to-Neumann sur les interfaces Σ_α^\pm (voir figure 2.5).

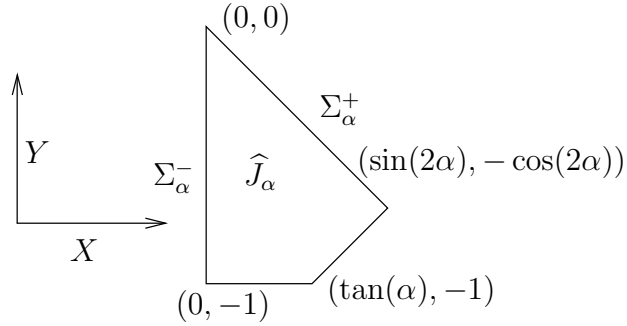


FIGURE 2.5 – Rappel de l'interface normalisée \widehat{J}_α

En utilisant (2.2.48), (2.2.49), (2.2.51) et (2.2.55), nous pouvons écrire, en séparant les termes $m = 0$ (qui font intervenir U^k) des autres termes :

$$\left| \begin{aligned} U_\pm^k &= \frac{1}{i} \left[\int_{-1}^0 \frac{\partial U_\pm^k}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) d\hat{\nu} \right] \mathbf{c}_{\pm,0}^0 + \sum_{p \in \mathbb{N}} \left[\int_{-1}^0 U_\pm^k(0, \hat{\nu}) w_p(\hat{\nu}) d\hat{\nu} \right] \mathbf{d}_{\pm,p}^0 \\ &+ \frac{1}{i} \sum_{m=1}^k \left[\int_{-1}^0 \frac{\partial U_\pm^{k-m}}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) d\hat{\nu} \right] \mathbf{c}_{\pm,0}^m + \sum_{m=1}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left[\int_{-1}^0 U_\pm^{k-m}(0, \hat{\nu}) w_p(\hat{\nu}) d\hat{\nu} \right] \mathbf{d}_{\pm,p}^m \end{aligned} \right. \quad (2.3.1)$$

Pour écrire la trace de U_\pm^k et de sa dérivée normale sur l'interface Σ_α^\pm , nous remarquons en utilisant

(2.2.30) que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{c}_{\pm,0}^0}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) = \iota, & \frac{\partial \mathbf{d}_{\pm,0}^0}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{c}_{\pm,0}^m}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) = \frac{\partial \mathbf{d}_{\pm,0}^m}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) = 0, & m \geq 1 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

De plus, nous déduisons de (2.2.31), (2.2.32) et de la proposition 2.2.7 l'existence de complexes δ_p^m , $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{\partial (d_{\pm,p}^m \exp(\mp p\pi \hat{s}))}{\partial \hat{s}}(0) = \pm \delta_p^m \quad \text{avec de plus} \quad \delta_p^0 = -p\pi \quad \text{et} \quad \delta_p^{2m+1} = 0 \quad (2.3.3)$$

et nous en déduisons immédiatement

$$\frac{\partial \mathbf{d}_{\pm,p}^m}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) = \pm \delta_p^m w_p(\hat{\nu}), \quad p \geq 1, \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.3.4)$$

En utilisant alors (2.3.2) et (2.3.4), la relation (2.3.1) devient

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial U_{\pm}^k}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) &= \left[\int_{-1}^0 \frac{\partial U_{\pm}^k}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}') d\hat{\nu}' \right] - \sum_{p \in \mathbb{N}} p\pi \left[\int_{-1}^0 U_{\pm}^k(0, \hat{\nu}') w_p(\hat{\nu}') d\hat{\nu}' \right] w_p(\hat{\nu}) \\ &\quad \pm \sum_{m=1}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \delta_p^m \left[\int_{-1}^0 U_{\pm}^{k-m}(0, \hat{\nu}') w_p(\hat{\nu}') d\hat{\nu}' \right] w_p(\hat{\nu}) \end{aligned} \right. \quad (2.3.5)$$

Il est alors naturel d'introduire les opérateurs non-locaux Dirichlet-to-Neumann T_{\pm} , dont les propriétés sont données dans l'annexe A.1, définis de $H^{\frac{1}{2}}(]-1, 0[)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(]-1, 0[)$ (où on identifie Σ_{α}^{\pm} à $]-1, 0[$) par

$$\begin{aligned} T : H^{\frac{1}{2}}(]-1, 0[) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(]-1, 0[) \\ \varphi &\mapsto T\varphi = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\int_{-1}^0 \varphi(\hat{\nu}) w_p(\hat{\nu}) d\hat{\nu} \right) w_p \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Finalement, en utilisant ces opérateurs et les conditions de raccord de Neumann (2.2.57-(\mathcal{N})), nous voyons que

$$\frac{\partial U^k}{\partial n} + T_{\pm} U^k = \pm \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_{\pm}^{k-1}}{\partial \hat{s}}(0) + \sum_{m=1}^k \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^m \left[\int_{-1}^0 U_{\pm}^{k-m}(0, \hat{\nu}') w_p(\hat{\nu}') d\hat{\nu}' \right] w_p(\hat{\nu}) \quad \text{sur } \Sigma_{\alpha}^{\pm} \quad (2.3.7)$$

Finalement, nous obtenons un problème équivalent au problème (2.2.18, 2.2.19, 2.2.20, 2.2.21, 2.2.57) en remplaçant (2.2.57-(\mathcal{N})) par la condition DtN (2.3.7). Le théorème suivant donne un cadre plus précis.

Théorème 2.3.1. *Soit $\{(u_-^k, u_+^k, U^k) \in H^1(\widehat{\Omega}_-) \times H^1(\widehat{\Omega}_+) \times H_{loc}^1(\widehat{J}_{\alpha}^{\infty}), \quad k \in \mathbb{N}\}$ solution de (2.2.18, 2.2.19, 2.2.20, 2.2.21) avec les conditions de raccord (2.2.57) et de croissance (2.2.55). Alors*

$$\left\{ (u_-^k, u_+^k, U^k) \in H^1(\widehat{\Omega}_-) \times H^1(\widehat{\Omega}_+) \times H^1(\widehat{J}_{\alpha}), \quad k \in \mathbb{N} \right\}$$

est solution de (2.2.18, 2.2.19), (2.2.20, 2.2.21) $_{\widehat{J}_{\alpha}}$, (2.2.57-(\mathcal{D})) et (2.3.7), où (2.2.20, 2.2.21) $_{\widehat{J}_{\alpha}}$ désigne la restriction de (2.2.20, 2.2.21) respectivement à \widehat{J}_{α} et $\partial \widehat{J}_{\alpha} \cap \partial \widehat{J}_{\alpha}^{\infty}$.

Inversement, si $\left\{ (u_-^k, u_+^k, U^k) \in H^1(\widehat{\Omega}_-) \times H^1(\widehat{\Omega}_+) \times H^1(\widehat{J}_\alpha), \quad k \in \mathbb{N} \right\}$ est solution de (2.2.18, 2.2.19), (2.2.20, 2.2.21) $_{\widehat{J}_\alpha}$, (2.2.57-(\mathcal{D})) et (2.3.7), alors en étendant U^k aux domaines \widehat{B}_\pm via (2.3.1),

$$\left\{ (u_-^k, u_+^k, U^k) \in H^1(\widehat{\Omega}_-) \times H^1(\widehat{\Omega}_+) \times H_{loc}^1(\widehat{J}_\alpha^\infty), \quad k \in \mathbb{N} \right\}$$

est solution de (2.2.18, 2.2.19, 2.2.20, 2.2.21, 2.2.57, 2.2.55).

Démonstration. La partie directe a déjà été prouvée (nous avons construit (2.3.7) dans ce but). Nous devons démontrer la partie réciproque. Soit $\left\{ (u_-^k, u_+^k, U^k) \in H^1(\widehat{\Omega}_-) \times H^1(\widehat{\Omega}_+) \times H^1(\widehat{J}_\alpha), \quad k \in \mathbb{N} \right\}$ est solution de (2.2.18, 2.2.19), (2.2.20, 2.2.21) $_{\widehat{J}_\alpha}$, (2.2.57-(\mathcal{D})) et (2.3.7), et étendons U^k aux domaines \widehat{B}_\pm via (2.3.1). La condition de croissance (2.2.55) est automatiquement vérifiée. Nous avons trois autres points à démontrer :

1. $U^k \in H_{loc}^1(\widehat{J}_\alpha^\infty)$,
2. U^k est solution de (2.2.20, 2.2.21),
3. la condition (2.2.57) est satisfaite.

1. Ce point est le plus facile à démontrer, puisque nous avons construit le développement (2.3.1) dans le but de satisfaire la continuité des traces en Σ_α^\pm
2. Ce point est également facile à démontrer. Nous savons que (2.2.20, 2.2.21) est satisfaite sur $\widehat{J}_\alpha \times \left(\partial \widehat{J}_\alpha \cap \partial \widehat{J}_\alpha^\infty \right)$. Il nous reste simplement à démontrer que ce point est également vrai sur $\widehat{B}_\pm \times \left(\partial \widehat{B}_\pm \cap \partial \widehat{J}_\alpha^\infty \right)$. Nous allons utiliser une démonstration similaire (pour ne pas dire identique) à la démonstration du lemme fondamental 2.2.9. Nous partons de (2.3.1) :

$$U_\pm^k = \frac{1}{i} \sum_{m=0}^k \left[\int_{-1}^0 \frac{\partial U_\pm^{k-m}}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) d\hat{\nu} \right] \mathbf{c}_{\pm,0}^m + \sum_{m=0}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left[\int_{-1}^0 U_\pm^{k-m}(0, \hat{\nu}) w_p(\hat{\nu}) d\hat{\nu} \right] \mathbf{d}_{\pm,p}^m$$

Nous appliquons l'opérateur Δ sur cette équation, nous utilisons (2.2.42) et en utilisant une réindexation, nous obtenons

$$\Delta U_\pm^k = U_\pm^{k-2}$$

Pour la condition de Neumann, nous utilisons (2.2.41) et le fait que chaque fonction w_p satisfait elle-même la condition de Neumann en $\hat{\nu} = \{-1, 0\}$.

3. Ce point est le plus délicat à démontrer. Nous partons de (2.3.1) et nous pouvons écrire facilement (2.3.5). Cette relation peut être réécrite sous la forme

$$\frac{\partial U^k}{\partial n} + T_\pm U^k = \pm \int_{-1}^0 \frac{\partial U^k}{\partial \hat{s}}(0, \hat{\nu}) d\hat{\nu} + \sum_{m=1}^k \sum_{p=1}^\infty \delta_p^m \left[\int_{-1}^0 U_\pm^{k-m}(0, \hat{\nu}') w_p(\hat{\nu}') d\hat{\nu}' \right] w_p(\hat{\nu}) \quad \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \quad (2.3.8)$$

Or, (2.3.6) doit être satisfaite. La différence entre (2.3.6) et (2.3.8) nous donne (2.2.57-(\mathcal{N})). \square

2.3.1.2 Lemmes auxiliaires

L'existence et l'unicité de nos familles de fonctions vont être démontrées par récurrence sur k . D'après le théorème 2.3.1, il suffit de considérer le problème (2.2.18, 2.2.19), (2.2.20, 2.2.21) $_{\widehat{J}_\alpha}$, (2.2.57-(\mathcal{D})) et (2.3.7). Afin de pouvoir identifier clairement le processus de récurrence, il est utile de reformuler

ce problème d'une manière plus découplée (nous sous-entendons entre u_{\pm}^k et U^k , pour une valeur de k donnée), qui sera également utile d'un point de vue numérique.

Afin de pouvoir découpler ces problèmes, l'idée est de considérer d'abord (2.3.7) comme une condition de bord pour U^k , afin de formuler un problème de transmission pour les fonctions u_{\pm}^k . C'est pourquoi nous allons utiliser les deux lemmes techniques suivants :

Lemme 2.3.2. *Soit $\Phi \in L^2(\widehat{J}_{\alpha})$ et $g_{\pm} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\alpha}^{\pm})$. Il existe une unique fonction $U \in H^1(\widehat{J}_{\alpha})$ à une constante additive près telle que*

$$\begin{cases} \Delta U = \Phi, & \text{dans } \widehat{J}_{\alpha} \\ \frac{\partial U}{\partial n} + T_{\pm}U = g_{\pm} & \text{sur } \Sigma_{\alpha}^{\pm} \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\widehat{J}_{\alpha} \setminus (\Sigma_{\alpha}^{-} \cup \Sigma_{\alpha}^{+}) \end{cases} \quad (2.3.9)$$

si et seulement si la condition de compatibilité suivante est satisfaite

$$\langle g_{-}, 1 \rangle_{\Sigma_{\alpha}^{-}} + \langle g_{+}, 1 \rangle_{\Sigma_{\alpha}^{+}} = \int_{\widehat{J}_{\alpha}} \Phi \quad (2.3.10)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_{\alpha}^{-}}$ est le crochet de dualité $(H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\alpha}^{-}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\alpha}^{-}))$.

Démonstration. La preuve d'existence et d'unicité à une constante additive près se fait en utilisant le théorème de Lax-Milgram. Pour régler le problème de l'unicité, nous cherchons une solution du problème (2.3.9) dans l'espace

$$\mathcal{V} = \left\{ V \in H^1(\widehat{J}_{\alpha}), \int_{\widehat{J}_{\alpha}} V = 0 \right\}$$

En multipliant la première ligne de (2.3.9) par une fonction test $v \in \mathcal{V}$ et en faisant une intégration par parties, nous avons

$$\int_{\widehat{J}_{\alpha}} \nabla U \nabla V + \int_{\Sigma_{\alpha}^{-}} VT_{-}U + \int_{\Sigma_{\alpha}^{+}} VT_{+}U = \langle g_{-}, V \rangle_{\Sigma_{\alpha}^{-}} + \langle g_{+}, V \rangle_{\Sigma_{\alpha}^{+}} - \int_{\widehat{J}_{\alpha}} \Phi V \quad (2.3.11)$$

Puisque \widehat{J}_{α} est un ouvert dont la frontière est \mathcal{C}^1 par morceaux, les applications trace de $H^1(\widehat{J}_{\alpha})$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\alpha}^{\pm})$ sont continues (voir [Bre83] pour plus de détails).

- Pour démontrer la continuité de la forme bilinéaire associée à (2.3.11), le terme en $\nabla U \nabla V$ est majoré par le produit des normes H^1 de U et V et utilisant Cauchy-Schwartz, et nous utilisons le fait que l'opérateur T_{\pm} est continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\alpha}^{\pm})$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\alpha}^{\pm})$ (la preuve de ce résultat est donnée dans la proposition A.1.3)
- Pour démontrer la coercivité de cette forme bilinéaire, nous utilisons l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (la preuve de cette inégalité peut être également trouvée dans [Bre83]) pour avoir

$$\int_{\widehat{J}_{\alpha}} |\nabla U|^2 \geq C \|U\|_{H^1(\widehat{J}_{\alpha})}^2$$

et nous utilisons le fait que T est un opérateur positif (la démonstration est donnée dans la proposition A.1.4).

La condition de compatibilité (2.3.10) s'obtient en prenant la fonction test $V = 1$ dans (2.3.11), et en utilisant le fait que l'opérateur T est un opérateur symétrique dont le noyau contient les fonctions constantes (ce résultat se trouve également dans l'annexe A.1). \square

Corollaire 2.3.3. Soit \mathcal{W}_α l'unique solution à moyenne nulle du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{W}_\alpha = 0 & \text{dans } \widehat{J}_\alpha \\ \frac{\partial \mathcal{W}_\alpha}{\partial n} + T_\pm \mathcal{W}_\alpha = \pm 1 & \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \\ \frac{\partial \mathcal{W}_\alpha}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \widehat{J}_\alpha \setminus (\Sigma_\alpha^- \cup \Sigma_\alpha^+) \end{cases}$$

et soit U une solution du problème (2.3.9). Alors

$$\int_{\Sigma_\alpha^+} U - \int_{\Sigma_\alpha^-} U = \int_{\Sigma_\alpha^+} g_+ \mathcal{W}_\alpha + \int_{\Sigma_\alpha^-} g_- \mathcal{W}_\alpha - \int_{\widehat{J}_\alpha} \Phi \mathcal{W}_\alpha \quad (2.3.12)$$

Démonstration. La fonction \mathcal{W}_α est définie de manière unique grâce au lemme 2.3.2 que nous venons juste de démontrer. Pour démontrer (2.3.12), nous multiplions la première ligne de (2.3.9) par \mathcal{W}_α , et nous intégrons sur \widehat{J}_α . En utilisant la formule de Green deux fois, et en utilisant le fait que la fonction \mathcal{W}_α est harmonique, nous avons

$$\sum_{\pm} \int_{\Sigma_\alpha^\pm} \left(\frac{\partial \mathcal{W}_\alpha}{\partial n} U - \frac{\partial U}{\partial n} \mathcal{W}_\alpha \right) = - \int_{\widehat{J}_\alpha} \Phi \mathcal{W}_\alpha$$

En utilisant les conditions de bord sur Σ_α^\pm pour les fonctions U et \mathcal{W}_α , et en utilisant la symétrie de l'opérateur T_\pm (la preuve est donnée dans la proposition A.1.5), nous obtenons (2.3.12). \square

Lemme 2.3.4. Soient $(j_d, j_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et $f_\pm \in L^2(]0, \pm L_\pm[)$ donnés. Il existe alors une unique fonction $u_\pm \in H^1(]0, \pm L_\pm[)$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\pm}{\partial \hat{s}^2} + \omega^2 u_\pm = f_\pm, & \text{dans } (0, \pm L_\pm) \\ \left(\frac{\partial u_\pm}{\partial \hat{s}} \mp \omega u_\pm \right) (\pm L_\pm) = 0 \\ u_+(0) - u_-(0) = j_d \\ \frac{\partial u_+(0)}{\partial \hat{s}} - \frac{\partial u_-(0)}{\partial \hat{s}} = j_n \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Démonstration. En utilisant la linéarité du problème (2.3.13), nous pouvons séparer la résolution du problème suivant deux problèmes :

- Un premier problème où $j_d = j_n = 0$: il s'agit d'une résolution classique d'un problème d'équation d'onde sur $H^1(]-L_-, L_+[)$ bien posé,
- Un second problème où $f_\pm = 0$. Nous allons montrer le caractère bien posé du problème en construisant la solution explicitement. En utilisant les deux premières lignes de (2.3.13), il existe des constantes $(c_-, c_+) \in \mathbb{C}^2$ telles que

$$u_\pm(\hat{s}) = c_\pm \exp(\pm i\omega \hat{s}), \quad \pm \hat{s} > 0$$

En injectant ces relations dans les deux dernières lignes de (2.3.13), nous obtenons

$$c_+ - c_- = j_d \quad \text{et} \quad i\omega(c_+ + c_-) = j_n$$

qui nous donne

$$c_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{j_n}{i\omega} + j_d \right) \quad \text{et} \quad c_- = \frac{1}{2} \left(\frac{j_n}{i\omega} - j_d \right) \quad \square$$

2.3.1.3 Existence et unicité

D'après (2.2.20, 2.2.21) $_{\hat{J}_\alpha}$ et (2.3.7), nous pouvons appliquer le lemme 2.3.2 avec $U = U^k$, $\Phi = -U^{k-2}$ et $g_\pm = g_\pm^{k-1}$. où

$$g_\pm^{k-1} = \pm \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_\pm^{k-1}}{\partial \hat{s}}(0) + \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^m \left[\int_{-1}^0 U_\pm^{k-m}(0, \hat{\nu}') w_p(\hat{\nu}') d\hat{\nu}' \right] w_p(\hat{\nu}), \quad \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \quad (2.3.14)$$

où l'indice $k-1$ dans g_\pm^{k-1} est "justifié" par le fait que g_\pm^{k-1} est connue explicitement quand u_\pm^{k-1} et U^m , pour $m \leq k-1$, le sont. En écrivant la condition de compatibilité (2.3.10), nous obtenons

$$\frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial u_+^{k-1}}{\partial \hat{s}}(0) - \frac{\partial u_-^{k-1}}{\partial \hat{s}}(0) \right) = - \int_{\hat{J}_\alpha} U^{k-2}$$

que nous réécrivons en faisant le changement d'indice $k \rightarrow k+1$

$$\frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial u_+^k}{\partial \hat{s}}(0) - \frac{\partial u_-^k}{\partial \hat{s}}(0) \right) = - \int_{\hat{J}_\alpha} U^{k-1} \quad (2.3.15)$$

De plus, la relation (2.3.12) nous donne

$$\int_{\Sigma_\alpha^+} U^k - \int_{\Sigma_\alpha^-} U^k = \int_{\Sigma_\alpha^+} g_+^{k-1} \mathcal{W}_\alpha + \int_{\Sigma_\alpha^-} g_-^{k-1} \mathcal{W}_\alpha + \int_{\hat{J}_\alpha} U^{k-2} \mathcal{W}_\alpha \quad (2.3.16)$$

que nous pouvons réécrire, en utilisant (2.2.57-(D)) :

$$u_+^k(0) - u_-^k(0) = \int_{\Sigma_\alpha^+} g_+^{k-1} \mathcal{W}_\alpha + \int_{\Sigma_\alpha^-} g_-^{k-1} \mathcal{W}_\alpha + \int_{\hat{J}_\alpha} U^{k-2} \mathcal{W}_\alpha \quad (2.3.17)$$

Pour chaque k , nous avons réussi à découpler le calcul de u_\pm^k puisque les conditions de saut (2.3.15) et (2.3.17) sont suffisantes, couplées aux équations (2.2.18) et (2.2.19), pour déterminer u_\pm^k de manière unique (c'est le résultat du lemme 2.3.4).

Comme solution du problème (2.3.9) avec $\Phi = -U^{k-2}$ et $g_\pm = g_\pm^{k-1}$, U^k est définie de manière unique à une constante additive près. Pour fixer la valeur de cette constante, nous pouvons utiliser de nouveau (2.2.57-(D)) de manière symétrique pour obtenir

$$u_+^k(0) + u_-^k(0) = \int_{\Sigma_\alpha^+} U^k + \int_{\Sigma_\alpha^-} U^k \quad (2.3.18)$$

Finalement, nous avons obtenu un problème équivalent à (2.2.18, 2.2.19), (2.2.20, 2.2.21) $_{\hat{J}_\alpha}$, (2.2.57-(D)) et (2.3.7). Plus précisément

Théorème 2.3.5. *Les deux problèmes sont équivalents (afin d'améliorer la clarté de la notation, nous omettons le cadre fonctionnel)*

- (i) $\{u_-^k, u_+^k, U^k, \quad k \geq 0\}$ est solution de (2.2.18, 2.2.19), (2.2.20, 2.2.21) $_{\hat{J}_\alpha}$, (2.2.57-(D)) et (2.3.7);
- (ii) $\{u_-^k, u_+^k, U^k, \quad k \geq 0\}$ est solution de (2.2.18, 2.2.19), (2.3.9) (avec $U = U^k$, $\Phi = -U^{k-2}$ et $g_\pm = g_\pm^{k-1}$) et (2.3.15, 2.3.17, 2.3.18), avec g_\pm^{k-1} définie par (2.3.14).

Démonstration. Nous venons de démontrer $(i) \Rightarrow (ii)$. Nous allons prouver l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$. Soit $\{u_-^k, u_+^k, U^k, \quad k \geq 0\}$ solution de (2.2.18, 2.2.19), (2.3.9) (avec $U = U^k$, $\Phi = -U^{k-2}$ et $g_{\pm} = g_{\pm}^{k-1}$) et (2.3.15, 2.3.17, 2.3.18), avec g_{\pm}^{k-1} définie par (2.3.14). Grâce au problème (2.3.9), (2.2.20, 2.2.21) $_{\widehat{J}_\alpha}$ est vérifié. De plus, en utilisant les écritures des g_{\pm}^k , la relation (2.3.7) est également vérifiée. Le seul point non trivial à vérifier est (2.2.57-(D)). Cependant, (2.3.18) est exactement

$$u_+^k(0) + u_-^k(0) = \int_{\Sigma_\alpha^+} U^k + \int_{\Sigma_\alpha^-} U^k$$

et, puisque nous pouvons écrire (2.3.16) grâce au problème satisfait par U^k et que (2.3.17) est satisfait, en prenant la différence, nous avons

$$u_+^k(0) - u_-^k(0) = \int_{\Sigma_\alpha^+} U^k - \int_{\Sigma_\alpha^-} U^k$$

(2.2.57-(D)) apparaît alors comme une combinaison linéaire des deux dernières relations que nous venons d'écrire. \square

Maintenant, nous allons montrer que le problème (2.2.18, 2.2.19), (2.3.9) (avec $U = U^k$, $\Phi = -U^{k-2}$ et $g_{\pm} = g_{\pm}^{k-1}$) et (2.3.15, 2.3.17, 2.3.18), avec g_{\pm}^{k-1} définie par (2.3.14), admet une unique solution $\{u_-^k, u_+^k, U^k, \quad k \geq 0\}$, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Le cas $k = 0$. Avec la convention de la remarque 2.2.6, nous déduisons de (2.2.18, 2.2.19, 2.3.15, 2.3.17) que u_{\pm}^0 est solution du problème de Helmholtz avec comme second membre \mathbf{f} , comme condition en $\pm \widehat{s} = L_{\pm}$ les conditions d'onde sortante, et avec des conditions de transmission nulles. Nous voyons alors que la fonction u^0 définie comme la "concaténation" de u_-^0 et de u_+^0 n'est autre que la solution du problème (2.1.24).

De plus, nous pouvons voir que la fonction U^0 résoud le problème (2.3.9) avec $\Phi = 0$ et $g_{\pm} = 0$. Nous en déduisons que U^0 est constante, et cette constante est fixée par (2.3.18) :

$$U^0 = \left(\int_{\Sigma_\alpha^+} U^0 + \int_{\Sigma_\alpha^-} U^0 \right) = u^0(0)$$

Le cas général $k > 0$. Supposons que $(u_-^\ell, u_+^\ell, U^\ell)$ sont connues jusqu'à $\ell = k - 1$. Alors :

- nous déterminons (u_-^k, u_+^k) comme étant l'unique solution du problème (2.2.18, 2.2.19) avec les conditions de transmission (2.3.15, 2.3.17) - il s'agit du lemme 2.3.4 ;
- nous calculons g_{\pm}^{k-1} grâce à (2.3.14) ;
- nous déterminons U^k comme l'unique solution (cf. lemme 2.3.2) du problème (2.3.9) pour $\Phi = -U^{k-2}$ et $g_{\pm} = g_{\pm}^{k-1}$, avec la condition de moyenne (2.3.18). Nous devons bien sûr vérifier la condition de compatibilité (2.3.10), mais cette condition de compatibilité n'est rien d'autre que la condition de saut (2.3.15) écrite pour " $k = k - 1$ ".

Finalement, en regroupant ces résultats avec les théorèmes 2.3.1 et 2.3.5, nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.3.6. *Il existe une unique famille $\{(u_-^k, u_+^k, U^k) \in H^1(\widehat{\Omega}_-) \times H^1(\widehat{\Omega}_+) \times H_{loc}^1(\widehat{J}_\alpha^\infty), \quad k \in \mathbb{N}\}$ solution de (2.2.18, 2.2.19, 2.2.20, 2.2.21) et vérifiant les conditions de raccord (2.2.57) et de croissance (2.2.55).*

2.3.2 Estimations d'erreurs

Dans cette section, nous allons démontrer que nous pouvons construire une fonction approchée dont la différence avec la fonction exacte u^ε diffère d'un terme dépendant entre autres de ε aussi petit que l'on veut. Nous allons donner deux estimations : une estimation globale sur tout le domaine $\Omega_\alpha^\varepsilon$, et une estimation locale sur chacune des fentes.

2.3.2.1 Estimation d'erreur globale

Nous considérons $\varphi \in \mathcal{C}$ (rappel : \mathcal{C} donné par (2.2.8) est la classe des fonctions $\varepsilon \mapsto \varphi(\varepsilon)$ qui tendent vers 0 lorsque ε tend vers 0, mais moins rapidement que $\varepsilon |\ln(\varepsilon)|$), et nous introduisons une famille de fonctions de troncatures Φ^ε , dépendantes de $\varphi(\varepsilon)$, telles que

$$\Phi^\varepsilon(\hat{s}) = \Phi\left(\frac{\hat{s}}{\varphi(\varepsilon)}\right) \quad \text{avec} \quad \Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+), \quad \text{supp } \Phi \in [0, 2], \quad \Phi = 1 \text{ sur } [0, 1] \quad (2.3.19)$$

à partir de laquelle nous construisons une fonction de troncature bi-dimensionnelle $\widehat{\Phi}^\varepsilon : \Omega_\alpha^\varepsilon \rightarrow [0, 1]$ telle que

- sur J_α^ε , $\widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$,
- sur Ω_\pm^ε , $\widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \Phi^\varepsilon(\pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^\pm)$,

l'idée étant de considérer une fonction de troncature dont les variations sont à support dans les domaines de raccord $\mathcal{O}_\pm^\varepsilon$. Bien entendu, nous aurons à un moment donné à faire le choix de la fonction φ .

Ensuite, étant donné $k \in \mathbb{N}$, nous proposons la fonction globale suivante (une idée naturelle est alors de choisir φ dépendante de k) :

$$\tilde{u}_k^\varepsilon := (1 - \widehat{\Phi}^\varepsilon) \sum_{m=0}^k (\varepsilon \omega)^m u_\pm^m \circ (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1} + \widehat{\Phi}^\varepsilon \sum_{m=0}^k (\varepsilon \omega)^m U^k \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} \quad (2.3.20)$$

Nous pouvons remarquer que les fonctions de troncatures devant les deux sommes sont non-nulles seulement sur les domaines spatiaux où nous avons supposé nos développements (2.2.15) valides.

Puisque nous avons le résultat de stabilité donné par le lemme 2.1.6, il suffit d'étudier la quantité

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon, v), \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}_\alpha)$$

où a^ε est la forme bilinéaire associée à la formulation (2.1.3). Nous utilisons la formule de Green pour transformer le terme en $\nabla(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon) \nabla v$ dans (2.1.3) sous la forme $\Delta(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)v$, et nous avons, en utilisant les conditions de bord sur chaque u_\pm^m , chaque U^m et sur u^ε

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon, v) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} -\Delta(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)v - \omega^2(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)v$$

Puisque la fonction u^ε vérifie l'équation de Helmholtz (2.1.2), nous avons

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon, v) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} (\Delta \tilde{u}_k^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_k^\varepsilon + f^\varepsilon) v \quad (2.3.21)$$

Nous injectons alors l'expression (2.3.20) dans (2.3.21), et nous pouvons voir que, puisque les dérivées de $\widehat{\Phi}^\varepsilon$ sont à support dans la bande $\varphi(\varepsilon) \leq \pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^\pm \leq 2\varphi(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
a^\varepsilon(u^\varepsilon - \widetilde{u}_k^\varepsilon, v) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\bar{\alpha}}^\varepsilon} f^\varepsilon v + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\bar{\alpha}}^\varepsilon} (1 - \widehat{\Phi}^\varepsilon) \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m (\Delta(u_\pm^m \circ (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1})v + \omega^2(u_\pm^m \circ (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1})v) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\bar{\alpha}}^\varepsilon} \widehat{\Phi}^\varepsilon \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m (\Delta(U^m \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1})v + \omega^2(U^m \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1})v) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\bar{\alpha}}^\varepsilon} \Delta \widehat{\Phi}^\varepsilon \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m (u_\pm^m \circ (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1} - U^m \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1})v \\
&+ \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\bar{\alpha}}^\varepsilon} \nabla \widehat{\Phi}^\varepsilon \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m (\nabla(u_\pm^m \circ (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1}) - \nabla(U^m \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}))v
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Notons que dans (2.3.22) les termes sont dédoublés pour u_\pm^k . Nous allons traiter séparément chaque terme de (2.3.22). Afin d'alléger les notations, nous confondrons v et $v \circ \Xi^\varepsilon$.

- le premier terme de (2.3.22) est le terme le plus facile à traiter. Nous avons

$$\Delta(u_\pm^m \circ (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1}) = \frac{\partial^2 u_\pm^k}{\partial \hat{s}^2} \circ (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1} \tag{2.3.23}$$

Par hypothèse sur la fonction f^ε , pour ε petit, nous avons $f^\varepsilon = 0$ quand $\widehat{\Phi}^\varepsilon \neq 0$, et nous pouvons écrire de plus $f^\varepsilon = \mathbf{f} \circ (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1}$ quand $\widehat{\Phi}^\varepsilon = 0$. Nous pouvons réécrire le premier terme de (2.3.22) sous la forme (en remarquant que $1 - \widehat{\Phi}^\varepsilon$ s'annule sur le domaine J_α^ε)

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\bar{\alpha}}^\varepsilon} (1 - \widehat{\Phi}^\varepsilon) \left(\mathbf{f} + \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m \left(\frac{\partial^2 u_\pm^m}{\partial \hat{s}^2} + \omega^2 u_\pm^m \right) \right) \circ (\Xi_\pm^\varepsilon)^{-1} v$$

Puisque la fonction u_\pm^m est solution de (2.2.18-(ii)), ce terme devient nul.

- le second terme se traite quasiment de la même façon. Nous écrivons pour les termes de fente une relation équivalente à (2.3.23) :

$$\Delta(U^m \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}) = \frac{1}{\varepsilon^2} (\Delta U^m) \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} \tag{2.3.24}$$

En utilisant cette relation, le second terme de (2.3.22) devient

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\bar{\alpha}}^\varepsilon} \widehat{\Phi}^\varepsilon \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \Delta U^m + \omega^2 U^m \right) \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} v \tag{2.3.25}$$

Nous utilisons alors (2.2.20) et le changement d'indice $m = m - 2$. (2.3.25) devient alors

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\bar{\alpha}}^\varepsilon} \widehat{\Phi}^\varepsilon \left((\varepsilon\omega)^{k-1} \omega^2 U^{k-1} \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x}) + (\varepsilon\omega)^k \omega^2 U^k \circ (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x}) \right) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{2.3.26}$$

Pour traiter ce terme, nous allons séparer la partie intégration sur J_α^ε de la partie intégration sur $\Omega_{\bar{\alpha}}^\varepsilon$.

- Sur le domaine J_α^ε , nous utilisons le changement de variable $\widehat{\mathbf{x}} = (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}\mathbf{x}$, $d\widehat{\mathbf{x}} = \varepsilon^{-2}d\mathbf{x}$ (donc $d\mathbf{x} = \varepsilon^2 d\widehat{\mathbf{x}}$) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous pouvons majorer la partie intégration sur J_α^ε de (2.3.26) par

$$\left((\varepsilon\omega)^k \omega \left\| U^{k-1} \right\|_{L^2(\widehat{J}_\alpha)} + (\varepsilon\omega)^{k+1} \omega \left\| U^k \right\|_{L^2(\widehat{J}_\alpha)} \right) \|v\|_{L^2(\widehat{J}_\alpha)} \quad (2.3.27)$$

- Sur le domaine Ω_\pm^ε , nous utilisons les coordonnées locales $s = \pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^\pm$, $\nu = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\pm$ ($d\mathbf{x} = ds d\nu$), et nous utilisons le fait que $\widehat{\Phi}$ s'annule pour $s \geq 2\varphi(\varepsilon)$. La partie intégration sur Ω_\pm^ε de (2.3.26) donne

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} \left((\varepsilon\omega)^{k-1} \omega^2 U^{k-1} \left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{\nu}{\varepsilon} \right) + (\varepsilon\omega)^k \omega^2 U^k \left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{\nu}{\varepsilon} \right) \right) v(s, \nu) ds d\nu \quad (2.3.28)$$

L'idée est de majorer (2.3.28) par la norme L^2 de U^k fois la norme L^2 de v sur le rectangle $]0, \varphi(\varepsilon)[\times]-\varepsilon, 0[$. Pour la partie $p = 0$ du développement modal (2.3.1) de U^k , nous avons à calculer des intégrales du type

$$\mathcal{I}_0^m = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} \left(\frac{s}{\varepsilon} \right)^m ds d\nu = (2\varphi(\varepsilon))^{m+1} / ((m+1)\varepsilon^m), \quad m \geq 2k \quad (2.3.29)$$

en utilisant le fait que les fonctions de bases intervenant dans l'écriture du développement modal sont de degré au plus m (proposition 2.2.7). Pour $p > 0$, nous gardons une valeur de m donnée du développement modal (2.3.1), et nous devons majorer l'intégrale

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 \left| \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} \sum_{p \geq 1} \left[\int_{-1}^0 U_\pm^{k-m}(\cdot, \hat{\nu}) d\hat{\nu} \right] d_{\pm,p}^k \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \exp\left(-p\pi \frac{s}{\varepsilon}\right) w_p \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right) \right|^2 ds d\nu \quad (2.3.30)$$

Nous faisons les changements de variables qui s'imposent : $\hat{s} = \frac{s}{\varepsilon}$, et $\hat{\nu} = \frac{\nu}{\varepsilon}$, pour réécrire (2.3.30) sous la forme

$$\varepsilon \int_{-1}^0 \int_0^{\frac{2\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}} \left| \sum_{p \geq 1} \left[\int_{-1}^0 U_\pm^{k-m}(\cdot, \hat{\nu}) d\hat{\nu} \right] d_{\pm,p}^k(\hat{s}) \exp(-p\pi \hat{s}) w_p(\hat{\nu}) \right|^2 d\hat{s} d\hat{\nu} \quad (2.3.31)$$

Nous utilisons une inégalité de Cauchy-Schwartz pour majorer (2.3.31) par

$$\varepsilon \left\{ \sum_{p \geq 1} p \left| \int_{-1}^0 U_\pm^{k-m}(\cdot, \hat{\nu}) d\hat{\nu} \right|^2 \right\} \left\{ \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p} \int_0^{\frac{2\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}} |d_{\pm,p}^m(\hat{s})|^2 \exp(-2p\pi \hat{s}) d\hat{s} \right\} \quad (2.3.32)$$

En utilisant un résultat de continuité démontré en annexe A.1.3, nous pouvons majorer le premier terme de (2.3.32) par $C \|U^{k-m}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\alpha^\pm)}^2$. Pour la majoration du second terme de (2.3.32), nous utilisons les propriétés suivantes :

- $d_{\pm,1}^m$ est de degré au plus $m/2$ (points 2 et 3 de la proposition 2.2.7), donc il existe C_m tel que

$$|d_{\pm,1}^m(\hat{s})| \leq C_m (1 + \hat{s}^{m/2})$$

ce qui implique donc

$$|d_{\pm,1}^m(\hat{s})|^2 \leq 2C_m^2 (1 + \hat{s}^m)$$

– le point 5 de la proposition 2.2.7 nous donne

$$d_{\pm,p}^m(\hat{s}) = p^{-m} d_{\pm,1}^m(\hat{s})$$

ce qui nous permet d'écrire la double majoration

$$|d_{\pm,p}^m(\hat{s})|^2 \leq 2C_m^2 p^{-2m} (1 + (p\hat{s})^m) \leq 2C_m p^{-m} (1 + \hat{s}^m) \quad (2.3.33)$$

– nous majorons l'intégrale sur $]0, \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}[$ par l'intégrale sur $]0, +\infty[$. Nous avons donc à calculer

$$\int_0^\infty (1 + \hat{s}^m) \exp(-2\pi p \hat{s}) d\hat{s} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{m!}{(2p\pi)^m} \right) \quad (2.3.34)$$

En utilisant alors (2.3.33) et (2.3.34), nous pouvons majorer le second membre de (2.3.32) par

$$\sum_{p \geq q \geq 1} 2C_m^2 \frac{1}{p^{m+2}} \left(1 + \frac{m!}{(2p\pi)^m} \right)$$

qui est une série absolument convergente dès que $m \geq 0$. Nous pouvons alors majorer (2.3.32) par

$$\tilde{C} \left\| U^{k-m} \right\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\alpha^\pm)}^2 \sum_{p \geq q \geq 1} \frac{1}{p^{m+2}} \left(1 + \frac{m!}{(2p\pi)^m} \right) < \infty \quad (2.3.35)$$

qui ne dépend pas de ε .

Finalement, pour majorer la norme L^2 normalisée (suivant la direction transverse) de v sur le rectangle $]0, \varphi(\varepsilon)[\times]-\varepsilon, 0[$, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 2.3.7. *Nous avons*

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|v\|_{L^2((s,\nu) \in]0, 2\varphi(\varepsilon)[\times]-\varepsilon, 0[)} \leq 2\sqrt{\varphi(\varepsilon)} \|v\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_\pm)}$$

Démonstration. Nous partons du carré du membre de gauche de la relation que nous voulons démontrer, et nous faisons le changement de variable $\nu = \varepsilon \hat{\nu}$, $d\nu = \varepsilon d\hat{\nu}$, pour avoir

$$I := \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} |v(s, \nu)|^2 ds d\nu = \int_{-1}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} |v(s, \hat{\nu})|^2 ds d\hat{\nu}$$

En utilisant une inégalité de la moyenne par rapport à s en gardant ν fixé, nous avons

$$\int_{-1}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} |v(s, \hat{\nu})|^2 ds d\hat{\nu} \leq \int_{-1}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} \left(|v(0, \nu)|^2 + \int_0^s \frac{\partial |v|^2}{\partial s}(\sigma, \hat{\nu}) d\sigma \right) ds d\hat{\nu}$$

qui est elle-même majorée par

$$2\varphi(\varepsilon) \int_{-1}^0 |v(0, \nu)|^2 d\nu + \int_{-1}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|(\sigma, \hat{\nu}) |v|(\sigma, \hat{\nu}) d\sigma ds d\hat{\nu}$$

Le premier morceau de cette inégalité est majoré par $2\varphi(\varepsilon) \|v\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_\pm)}^2$ d'après le théorème de trace. Pour le second morceau (qui ne dépend pas de s), nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour obtenir une majoration par

$$2\varphi(\varepsilon) \left(\int_{-1}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial s}(s, \hat{\nu}) \right|^2 ds d\hat{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} |v(s, \hat{\nu})|^2 ds d\hat{\nu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous utilisons alors la majoration suivante :

$$\left(\int_{-1}^0 \int_0^{2\varphi(\varepsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial s}(s, \hat{\nu}) \right|^2 ds d\hat{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|v\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_{\pm})}$$

pour obtenir

$$I^2 \leq 2\varphi(\varepsilon) \|v\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_{\pm})}^2 + 2\varphi(\varepsilon) \|v\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_{\pm})} I$$

Pour obtenir le résultat souhaité, nous majorons I dans le membre de droite de cette dernière inégalité par $\|v\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_{\pm})}$. \square

En utilisant la relation (2.3.29), la majoration (2.3.35) et le lemme 2.3.7 que nous venons juste de démontrer, nous pouvons majorer la partie intégration sur $\Omega_{\pm}^{\varepsilon}$ de (2.3.26) par

$$\left(C_{k-1} \omega^{k+1} \varphi(\varepsilon)^k \|U^{k-1}\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\mathcal{J}}_{\alpha})} + C_k \omega^{k+2} \varphi(\varepsilon)^{k+1} \|U^k\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\mathcal{J}}_{\alpha})} \right) \|v\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_{\pm})} \quad (2.3.36)$$

- le troisième terme est plus dur à traiter : nous faisons le changement de variable $(\hat{s}, \hat{\nu}) = (\Xi_{\pm}^{\varepsilon})^{-1} \mathbf{x}$, $d\hat{s} d\hat{\nu} = \varepsilon^{-1} d\mathbf{x}$, et nous constatons qu'en utilisant ce changement de variables,

$$(\Delta \hat{\Phi}^{\varepsilon}) \circ \Xi_{\pm}^{\varepsilon} = \frac{\partial^2 \Phi^{\varepsilon}}{\partial \hat{s}^2}(\pm \hat{s}) = \frac{1}{\varphi(\varepsilon)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \hat{s}^2}(\pm \hat{s}) \quad (2.3.37)$$

Nous pouvons voir facilement que cette fonction est non-nulle que pour $\varphi(\varepsilon) \leq \pm \hat{s} \leq 2\varphi(\varepsilon)$. Nous allons utiliser ces deux inégalités :

- Pour les fonctions de jonction U^m , nous partons du développement modal donné par (2.3.1). Nous utilisons alors le fait que puisque $\pm \hat{s} \geq \varphi(\varepsilon)$, nous avons $\exp(\mp p\pi \hat{s}/\varepsilon) \leq \exp(-p\pi \varphi(\varepsilon)/\varepsilon)$ et à cause du fait que $\varphi \in \mathcal{C}$, ce terme exponentiel est $o(\varepsilon^{\infty})$. En faisant des manipulations analogues à celles effectuées pour obtenir (2.2.54), et en utilisant les conditions de raccord (2.2.57), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k (\varepsilon \omega)^m U^m \left(\frac{\hat{s}}{\varepsilon}, \frac{\hat{\nu}}{\varepsilon} \right) &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{m=0}^{k-2\ell-1} (\varepsilon \omega)^m \frac{\partial u_{\pm}^m}{\partial \hat{s}}(0) \frac{(-\omega^2)^{\ell} \hat{s}^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\ &+ \sum_{\ell=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{m=0}^{k-2\ell} (\varepsilon \omega)^m u_{\pm}^m(0) \frac{(-\omega^2)^{\ell} \hat{s}^{2\ell}}{(2\ell)!} + o(\varepsilon^{\infty}) \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Nous utilisons le fait que u_{\pm}^m est solution de l'équation de Helmholtz, en particulier en $\hat{s} = 0$, afin que (2.3.38) devienne

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k (\varepsilon \omega)^m U^m \left(\frac{\hat{s}}{\varepsilon}, \frac{\hat{\nu}}{\varepsilon} \right) &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{m=0}^{k-2\ell-1} (\varepsilon \omega)^m \frac{\partial^{2\ell+1} u_{\pm}^m}{\partial \hat{s}^{2\ell+1}}(0) \frac{\hat{s}^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\ &+ \sum_{\ell=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{m=0}^{k-2\ell} (\varepsilon \omega)^m \frac{\partial^{2\ell} u_{\pm}^m}{\partial \hat{s}^{2\ell}}(0) \frac{\hat{s}^{2\ell}}{(2\ell)!} + o(\varepsilon^{\infty}) \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

En faisant une réindexation adaptée, nous écrivons finalement (2.3.39) sous la forme

$$\sum_{m=0}^k (\varepsilon \omega)^m U^m \left(\frac{\hat{s}}{\varepsilon}, \frac{\hat{\nu}}{\varepsilon} \right) = \sum_{m=0}^k (\varepsilon \omega)^m \sum_{l=0}^{k-m} \frac{\partial^l u_{\pm}^m}{\partial \hat{s}^l}(0) \frac{\hat{s}^l}{l!} + o(\varepsilon^{\infty}) \quad (2.3.40)$$

- Pour les fonctions de fente u_{\pm}^m , la relation (2.3.40) nous incite à utiliser un développement de Taylor avec reste intégral au voisinage de $\hat{s} = 0$. Le fait que $\pm\hat{s} \leq 2\varphi(\varepsilon)$ nous dit que justement, pour ε petit, nous allons nous trouver dans ce voisinage. Nous faisons un développement de Taylor avec reste intégral (que nous pouvons aussi trouver dans [Bre83]) à l'ordre $k - m$ pour la fonction u_{\pm}^k , et nous avons :

$$u_{\pm}^m(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{k-m} \frac{s^l}{l!} \frac{\partial^l u_{\pm}^m}{\partial \hat{s}^l}(0) + \int_0^{\hat{s}} \frac{1}{(k-m)!} \frac{\partial^{k+1-m} u_{\pm}^m}{\partial \hat{s}^{k+1-m}}(\sigma) (\hat{s} - \sigma)^{k-m} d\sigma \quad (2.3.41)$$

En faisant la différence entre (2.3.40) et $\sum(\varepsilon\omega)^m$ (2.3.41), le troisième terme de (2.3.22) devient (modulo le terme en $o(\varepsilon^\infty)$) :

$$\frac{1}{\varepsilon \varphi(\varepsilon)^2} \int_{-\varepsilon}^0 \int_{\varphi(\varepsilon)}^{2\varphi(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \hat{s}^2} \left(\frac{\pm \hat{s}}{\varphi(\varepsilon)} \right) \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m I_{k,m}(\hat{s}) v(\hat{s}, \nu) d\hat{s} d\nu \quad (2.3.42)$$

avec

$$I_{k,m}(\hat{s}) = \left[\int_0^{\hat{s}} \frac{1}{(k-m)!} \frac{\partial^{k+1-m} u_{\pm}^m}{\partial \hat{s}^{k+1-m}}(\sigma) (\hat{s} - \sigma)^{k-m} d\sigma \right] \quad (2.3.43)$$

Bien que le terme $I_{k,m}(\hat{s})$ ne dépende pas de ε , nous allons montrer que l'intégrale de ce terme sur un domaine de taille $\varphi(\varepsilon)$ est en $\varphi(\varepsilon)^{k-m}$, à une puissance de $\varphi(\varepsilon)$ et/ou ε près qui ne dépend pas de $k - m$. Pour celà, nous faisons le changement de variable $\nu = \varepsilon \hat{\nu}$, $d\nu = \varepsilon d\hat{\nu}$ pour réécrire (2.3.42) sous la forme

$$\frac{1}{\varphi(\varepsilon)^2} \int_{-1}^0 \int_{\varphi(\varepsilon)}^{2\varphi(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \hat{s}^2} \left(\frac{\pm \hat{s}}{\varphi(\varepsilon)} \right) \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m I_{k,m}(\hat{s}) v(\hat{s}, \hat{\nu}) d\hat{s} d\hat{\nu} \quad (2.3.44)$$

Nous utilisons alors une inégalité de Cauchy-Schwartz sur (2.3.44), et le lemme 2.3.7 (avec le changement de variable déjà effectué suivant ν). Nous devons alors estimer la norme L^2 de $I_{k,m}$ sur l'intervalle $]\varphi(\varepsilon), 2\varphi(\varepsilon)[$. Or nous avons, en utilisant (2.3.43) :

$$\int_{\varphi(\varepsilon)}^{2\varphi(\varepsilon)} |I_{k,m}(\hat{s})|^2 d\hat{s} = \int_{\varphi(\varepsilon)}^{2\varphi(\varepsilon)} \left| \int_0^{\hat{s}} \frac{1}{(k-m)!} \frac{\partial^{k+1-m} u_{\pm}^m}{\partial \hat{s}^{k+1-m}}(\sigma) (\hat{s} - \sigma)^{k-m} d\sigma \right|^2 d\hat{s} \quad (2.3.45)$$

En utilisant de nouveau une inégalité de Cauchy-Schwartz sur (2.3.45), nous avons

$$\int_{\varphi(\varepsilon)}^{2\varphi(\varepsilon)} |I_{k,m}(\hat{s})|^2 d\hat{s} \leq \left(\int_{\varphi(\varepsilon)}^{2\varphi(\varepsilon)} \int_0^{\hat{s}} \left| \frac{\partial^{k+1-m} u_{\pm}^m}{\partial \hat{s}^{k+1-m}}(\sigma) \right|^2 d\sigma d\hat{s} \right) \left(\int_{\varphi(\varepsilon)}^{2\varphi(\varepsilon)} \int_0^{\hat{s}} \left| \frac{(\hat{s} - \sigma)^{k-m}}{(k-m)!} \right|^2 d\sigma d\hat{s} \right) \quad (2.3.46)$$

Pour le membre de droite de (2.3.46), nous traitons séparément les deux intégrales :

- l'intégrale du premier terme sur $\sigma \in (0, \hat{s})$ peut être majorée par l'intégrale sur S_{\pm} , auquel cas la majoration ne dépend plus de \hat{s} . Nous pouvons majorer ce terme par

$$\varphi(\varepsilon) \left\| \frac{\partial^{k+1-m} u^m}{\partial \hat{s}^{k+1-m}} \right\|_{L^2(S_{\pm})}^2 \quad (2.3.47)$$

Pour $m \geq 1$, nous pouvons majorer (2.3.47) par $\varphi(\varepsilon)\omega^{2k+2-2m} \|u^m\|_{L^2(S_{\pm})}^2$ en utilisant l'écriture explicite de u^m donné par le lemme 2.3.4 quand $f_{\pm} = 0$. Pour $m = 0$, les sauts de la

fonction en $\hat{s} = 0$ sont nuls. Une récurrence sur l'équation définissant u^0 montre que nous pouvons alors majorer (2.3.47) par la quantité suivante, avec C indépendant de k, m .

$$C\varphi(\varepsilon)\omega^{2k+2-2m} \left(\|u^m\|_{\mathbb{H}^1(S_{\pm})}^2 + \delta_{m,0} \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}^k(S_{\pm})} \right) \quad (2.3.48)$$

– pour l'intégrale du second terme, nous pouvons enlever la valeur absolue puisque le terme à l'intérieur est strictement positif. Le calcul de ce terme nous donne

$$\frac{(k+1-m)(2^{2k+2-2m}-1)\varphi(\varepsilon)^{2k+2-2m}}{2(k+1-m)!2(2k-2m+1)} \leq \left(\frac{(2\varphi(\varepsilon))^{k+1-m}}{(k-m)!} \right)^2 \quad (2.3.49)$$

Finalement, en utilisant (2.3.48) et (2.3.49), nous pouvons majorer (2.3.43) par

$$\int_{\varphi(\varepsilon)}^{2\varphi(\varepsilon)} |I_{k,m}(\hat{s})|^2 d\hat{s} \leq C \left(\omega^{k+1-m} \left(\|u^m\|_{\mathbb{H}^1(S_{\pm})} + \delta_{m,0} \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}^k(S_{\pm})} \right) \frac{(2\varphi(\varepsilon))^{k+\frac{3}{2}-m}}{(k-m)!} \right)^2 \quad (2.3.50)$$

et nous pouvons finalement majorer (2.3.44), et ainsi le terme de départ, par

$$\frac{1}{\varphi(\varepsilon)^2} \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m \omega^{k+1-m} C_{k,m} \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \hat{s}^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \|u^m\|_{\mathbb{H}^1(S_{\pm})} \|v\|_{\mathbb{H}^1(\widehat{\Omega}_{\pm})} \frac{\varphi(\varepsilon)^{k+2-m}}{(k-m)!} \quad (2.3.51)$$

En utilisant le fait que nous pouvons majorer ε par $\varphi(\varepsilon)$, et en notant

$$\tilde{C}_k = \sum_{m=0}^k \frac{C_{k,m}}{(k-m)!} \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \hat{s}^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \left(\|u^m\|_{\mathbb{H}^1(S_{\pm})} + \delta_{m,0} \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}^k(S_{\pm})} \right),$$

nous pouvons majorer (2.3.51), et ainsi le terme de départ, par

$$\tilde{C}_k \omega^{k+1} \varphi(\varepsilon)^k \quad (2.3.52)$$

- finalement, pour le quatrième de (2.3.22), nous utilisons le même schéma de majoration que pour la majoration du troisième, et nous obtenons une majoration similaire à la majoration (2.3.52)

En mettant bout à bout les majorations (2.3.36) et (2.3.52), et en utilisant le résultat de stabilité 2.1.6, nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème 2.3.8. *Il existe une constante C_k ne dépendant que de k et de \mathbf{f} , et il existe ε_0 dépendant du choix de la fonction φ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, nous avons*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\widehat{\Omega}_\alpha)} \leq C_k \omega^{k+1} \varphi(\varepsilon)^k \quad (2.3.53)$$

2.3.2.2 Estimation d'erreur locale

Nous obtenons une meilleure estimation d'erreur si nous regardons l'erreur dans le domaine (où $\delta > 0$ est donné) :

$$\widehat{\Omega}_\pm^\delta = \left\{ (\hat{s}, \hat{\nu}) \in \widehat{\Omega}_\pm \quad \text{tel que} \quad \pm \hat{s} > \delta \right\}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, nous décomposons $u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon$ sous la forme

$$u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon = (u^\varepsilon - \tilde{u}_{k+2}^\varepsilon) + (\tilde{u}_{k+2}^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)$$

et une inégalité triangulaire classique nous donne

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\widehat{\Omega}_\pm^\delta)} \leq \|u^\varepsilon - \tilde{u}_{k+2}^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\widehat{\Omega}_\pm^\delta)} + \|\tilde{u}_{k+2}^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\widehat{\Omega}_\pm^\delta)} \quad (2.3.54)$$

En utilisant le théorème 2.3.8 pour $k = k + 2$, et en faisant le choix de la fonction $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon|\ln(\varepsilon)|^2$, nous pouvons voir que

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_{k+2}^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\widehat{\Omega}_\pm^\delta)} \leq C_{k+2}(\varepsilon\omega)^{k+1} \varepsilon |\ln(\varepsilon)|^{2k} \quad (2.3.55)$$

D'autre part, pour ε tel que $2\varepsilon|\ln(\varepsilon)|^2 \leq \delta$, les fonctions \tilde{u}_k^ε et $\tilde{u}_{k+2}^\varepsilon$ coïncident avec le développement (2.2.9) de la fonction u^ε . Nous avons donc

$$\tilde{u}_{k+2}^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon = (\varepsilon\omega)^{k+1} u_\pm^{k+1} + (\varepsilon\omega)^{k+2} u_\pm^{k+2}$$

et nous pouvons contrôler la norme puisque les fonctions u_\pm^{k+1} et u_\pm^{k+2} ne dépendent pas de ε . Nous pouvons de plus écrire le théorème suivant :

Théorème 2.3.9. *Quel que soit $0 < \delta < \delta^*$, nous pouvons construire la fonction approchée \mathbf{u}_k^ε définie sur $\widehat{\Omega}_\pm$ par*

$$\mathbf{u}_k^\varepsilon = \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m u_\pm^m \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_\pm$$

Alors :

- pour ε tel que $2\varepsilon|\ln(\varepsilon)|^2 \leq \delta$, nous avons $\mathbf{u}_k^\varepsilon = \tilde{u}_k^\varepsilon$,
- nous avons l'estimation d'erreur suivante : il existe une constante $C_{k,\delta}$ ne dépendant que de k et de δ telle que

$$\|u^\varepsilon - \mathbf{u}_k^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\widehat{\Omega}_\pm^\delta)} \leq C_{k,\delta}(\varepsilon\omega)^{k+1} \quad (2.3.56)$$

Démonstration. La preuve de ce théorème est triviale et provient des résultats précédents. \square

Remarque 2.3.10. Peut-on prendre directement $\delta = 0$ dans l'estimation (2.3.56) du théorème précédent ? La réponse est non parce que l'estimation devient fautive quand $\delta = 0$. En effet, en notant \mathbf{u}_k^ε la fonction définie dans le théorème 2.3.9, et en notant

$$[u^\varepsilon]_\pm^p(\hat{s}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^0 u(\hat{s}, \varepsilon\hat{\nu}) w_p(\hat{\nu}) d\hat{\nu},$$

nous remarquons que, en utilisant les propriétés sur la transformée de Fourier (que nous pouvons trouver de nouveau dans [Bre83]), et en utilisant le fait que \mathbf{u}_k^ε ne dépende pas de la variable transverse $\hat{\nu}$,

$$\|u^\varepsilon - \mathbf{u}_k^\varepsilon\|_{L^2(\widehat{\Omega}_\pm)}^2 = \left\| [u^\varepsilon]_\pm^0 - \mathbf{u}_k^\varepsilon \right\|_{L^2(S_\pm)}^2 + \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left\| [u^\varepsilon]_\pm^p \right\|_{L^2(S_\pm)}^2 \quad (2.3.57)$$

Nous utilisons alors l'estimation globale (2.3.53) du théorème 2.3.8 pour dire que la norme $\left\| [u^\varepsilon]_\pm^p \right\|_{L^2(S_\pm)}$ se comporte comme ε : en effet, au voisinage de $\hat{s} = 0$, u^ε admet plutôt (2.2.15-(ii)) comme développement, et nous savons en étudiant un développement naïf dans la section 2.2.1 que le comportement du terme en ε dans ce développement est vraiment 2D.

2.4 Construction et analyse des conditions de Kirchhoff améliorées

Nous savons maintenant que les fonctions u_{\pm}^k sont bien définies grâce au théorème 2.3.6, et que le théorème 2.3.9 nous dit que le développement tronqué de la solution à l'ordre k diffère de la solution exacte en ε^{k+1} . À priori, si nous voulons connaître une approximation de la solution à l'ordre k , il est nécessaire de calculer $k + 1$ termes du développement, et ainsi de résoudre à ω fixé :

- $k + 1$ problèmes de Helmholtz 1D sur les fentes
- $k + 1$ problèmes de Laplace 2D sur la jonction

Au lieu de cela, nous allons construire une fonction \tilde{u}^ε définie sur $S_- \cup S_+$ qui va satisfaire un problème bien posé que nous devons préciser, et dont l'approximation à l'ordre k est exactement u_k^ε , où u_k^ε est la fonction définie dans le théorème 2.3.9. L'avantage de pouvoir définir une telle fonction est qu'elle sera une approximation à l'ordre k de la solution u^ε du problème de Helmholtz 2D, et qu'elle sera donnée par la résolution d'un seul problème de Helmholtz 1D (modulo la résolution de k problèmes de Laplace 2D).

Bien qu'il soit *a priori* possible de définir une telle fonction pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous présentons les calculs pour $k = 1$.

2.4.1 Construction des conditions de Kirchhoff

Notons $u^{\varepsilon,1}$ la fonction définie de $H^1(S_-) \times H^1(S_+)$ par

$$u^{\varepsilon,1}(\hat{s}) = u_{\pm}^0(\hat{s}) + (\varepsilon\omega) u_{\pm}^1(\hat{s}), \quad \hat{s} \in S_{\pm} \quad (2.4.1)$$

où u_{\pm}^0 et u_{\pm}^1 sont les termes du développement (2.2.15-(i)). Nous savons déjà en utilisant (2.2.18-(ii)) et (2.2.19) que $u^{\varepsilon,1}$ est solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}^2} + \omega^2 u^{\varepsilon,1} = -\mathbf{f} \quad \text{dans } S_- \text{ et dans } S_+ \\ \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}} \mp \omega u^{\varepsilon,1} \right) (\pm L_{\pm}) = 0 \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

D'après le lemme 2.3.4, $u^{\varepsilon,1}$ est déterminée de manière unique si nous connaissons les sauts de la fonction et de sa dérivée en $\hat{s} = 0$. Bien entendu, nous pouvons exprimer ces conditions de sauts en fonction des termes du développement de la fonction u^ε . L'idée maintenant est d'écrire ces conditions de saut en fonction de $u^{\varepsilon,1}$ elle-même.

Définition 2.4.1 (Saut et moyenne d'une fonction). Soit u une fonction définie sur $\mathcal{C}^0(S_-) \times \mathcal{C}^0(S_+)$. Nous notons u_{\pm} sa restriction à S_{\pm} , et nous notons :

- le saut de u défini par

$$[u] = u_+(0) - u_-(0) \quad (2.4.3)$$

- la moyenne de u définie par

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} (u_+(0) + u_-(0)) \quad (2.4.4)$$

D'après le problème limite (2.1.24), u^0 vérifie les conditions suivantes

$$[u^0] = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial u^0}{\partial \hat{s}} \right] = 0 \quad (2.4.5)$$

Il nous reste à calculer les sauts pour la fonction u^1 :

- pour le saut de la valeur de Neumann, nous utilisons la condition (2.3.15) écrite pour $k = 1$, et le fait que la fonction U^0 est une fonction constante égale à $u^0(0)$, où encore $\langle u^0 \rangle$. Nous avons

$$\left[\frac{\partial u^1}{\partial \hat{s}} \right] = -\omega \int_{\hat{J}_\alpha} \langle u^0 \rangle = -\omega \tan(\alpha) \langle u^0 \rangle \quad (2.4.6)$$

Et dans ce cas,

$$\left[\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}} \right] = \left[\frac{\partial u^0}{\partial \hat{s}} \right] + (\varepsilon\omega) \left[\frac{\partial u^1}{\partial \hat{s}} \right] = -\varepsilon\omega^2 \tan(\alpha) \langle u^0 \rangle \quad (2.4.7)$$

- pour le saut de la valeur de Dirichlet, nous utilisons la condition (2.3.17) associée à la condition de saut de Neumann (2.4.5) pour u^0 , pour avoir

$$[u^1] = \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_+^0}{\partial \hat{s}} \int_{\Sigma_\alpha^+} \mathcal{W}_\alpha - \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_-^0}{\partial \hat{s}} \int_{\Sigma_\alpha^-} \mathcal{W}_\alpha = \frac{1}{\omega} \left\langle \frac{\partial u^0}{\partial \hat{s}} \right\rangle \left(\int_{\Sigma_\alpha^+} \mathcal{W}_\alpha - \int_{\Sigma_\alpha^-} \mathcal{W}_\alpha \right)$$

Nous appelons $K(\alpha)$ la quantité définie par

$$K(\alpha) = \int_{\Sigma_\alpha^+} \mathcal{W}_\alpha - \int_{\Sigma_\alpha^-} \mathcal{W}_\alpha \quad (2.4.8)$$

et en utilisant le saut de Dirichlet de u^0 , nous avons

$$[u^{\varepsilon,1}] = [u^0] + (\varepsilon\omega) [u^1] = \varepsilon K(\alpha) \left\langle \frac{\partial u^0}{\partial \hat{s}} \right\rangle \quad (2.4.9)$$

Remarque 2.4.2. Ici, nous voyons très bien les effets de la forme de la jonction \hat{J}_α sur l'écriture des sauts de la fonction u^1 .

Nous réécrivons les termes (2.4.7) et (2.4.9) en remplaçant les termes en u^0 par les mêmes termes en $u^{\varepsilon,1}$, et en négligeant les termes en $O(\varepsilon^2)$. Nous avons donc

$$\left[\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}} \right] = -\varepsilon\omega^2 \tan(\alpha) \langle u^{\varepsilon,1} \rangle \quad \text{et} \quad [u^{\varepsilon,1}] = \varepsilon K(\alpha) \left\langle \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}} \right\rangle \quad (2.4.10)$$

2.4.2 Analyse des conditions de Kirchhoff

Nous allons démontrer dans cette section que le problème défini dans (2.4.2) et (2.4.10) est bien posé, et que la solution de ce problème ne s'éloigne pas trop de la solution du problème exact.

2.4.2.1 Développement asymptotique

De la même manière que dans l'hypothèse 2.2.3, nous allons utiliser une hypothèse d'écriture pour la fonction $u^{\varepsilon,1}$.

Hypothèse 2.4.3. Il existe $(\tilde{u}_-, \tilde{u}_+^k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^1(S_-) \times H^1(S_+)$ tels que

$$u^{\varepsilon,1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\varepsilon\omega)^k \tilde{u}_\pm^k \quad \text{dans } S_\pm \quad (2.4.11)$$

Nous pouvons voir facilement que la famille de fonctions \tilde{u}_\pm^k est solution de la même équation de Helmholtz que la famille de fonctions u_\pm^k avec la même condition d'onde sortante, et les conditions de saut suivantes :

$$\left[\tilde{u}^k \right] = \frac{1}{\omega} K(\alpha) \left\langle \frac{\partial \tilde{u}^{k-1}}{\partial \hat{s}} \right\rangle \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial \hat{s}} \right] = -\omega \tan(\alpha) \left\langle \tilde{u}^{k-1} \right\rangle \quad (2.4.12)$$

Proposition 2.4.4. La famille de fonctions $(\tilde{u}_-, \tilde{u}_+^k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^1(S_-) \times H^1(S_+)$ est bien définie.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe du lemme 2.3.4. \square

2.4.2.2 Estimations d'erreur

Théorème 2.4.5. *Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, nous pouvons construire la fonction approchée*

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon = \sum_{m=0}^k (\varepsilon\omega)^m \tilde{\mathbf{u}}_\pm^m \quad \text{dans } S_\pm$$

Alors il existe une constante C_k indépendante de ε telle que

$$\|u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(S_\pm)} \leq C_k (\varepsilon\omega)^{k+1} \quad (2.4.13)$$

Démonstration. La preuve de ce théorème est similaire à la preuve du théorème 2.3.9 : nous allons démontrer un résultat de stabilité, un résultat de consistance, et une amélioration du résultat de consistance.

- **Résultat de stabilité.** Soit \mathcal{H} l'espace variationnel $\mathbf{H}^1(S_-) \times \mathbf{H}^1(S_+)$, muni de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{H},\varepsilon}^2 = \|v\|_{\mathbf{H}^1(S_-)}^2 + \|v\|_{\mathbf{H}^1(S_+)}^2 + \frac{1}{\varepsilon K(\alpha)} |[v]|^2 \quad (2.4.14)$$

Nous pouvons noter que à ε fixé, cette norme est équivalente à la norme $\mathbf{H}^1(S_\pm)$, et que de plus nous avons

$$\|v\|_{\mathbf{H}^1(S_-)}^2 + \|v\|_{\mathbf{H}^1(S_+)}^2 \leq \|v\|_{\mathcal{H},\varepsilon}^2$$

Le problème (2.4.2, 2.4.10) peut être écrit sous la forme variationnelle suivante : trouver $u^{\varepsilon,1} \in \mathcal{H}$ tel que, pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \int_{S_\pm} \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}} \frac{\partial v}{\partial \hat{s}} - \omega^2 u^{\varepsilon,1} v \right) - \omega u^{\varepsilon,1} (\pm L_\pm) v (\pm L_\pm) \\ + \frac{1}{\varepsilon K(\alpha)} [u^{\varepsilon,1}] [v] - \varepsilon \omega^2 \tan(\alpha) \langle u^{\varepsilon,1} \rangle \langle v \rangle = \int_{S_\pm} \mathbf{f} v \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Nous appelons $\tilde{a}^\varepsilon(u^{\varepsilon,1}, v)$ la forme bilinéaire associée au membre de gauche de (2.4.15), et nous allons démontrer le résultat de stabilité suivant :

Lemme 2.4.6. *Il existe une constante C indépendante de ε telle que*

$$\|u\|_{\mathcal{H},\varepsilon} \leq C \|\tilde{a}^\varepsilon(u, \cdot)\|_{\mathcal{H},\varepsilon}$$

Démonstration du lemme 2.4.6. Par contradiction, supposons qu'il existe une suite de fonctions v^ε telles que

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{H},\varepsilon} = 1 \quad \text{et} \quad \|\tilde{a}^\varepsilon(v^\varepsilon, \cdot)\|_{\mathcal{H},\varepsilon} = 0 \quad (2.4.16)$$

D'après (2.4.16), la suite v^ε est bornée dans $\mathbf{H}^1(S_\pm)$, donc il existe une sous-suite (que l'on continuera à noter v^ε) qui converge faiblement dans $\mathbf{H}^1(S_\pm)$ et fortement dans $L^2(S_\pm)$ vers une fonction limite v^0 . De plus, en utilisant la définition de la norme \mathcal{H} donnée par (2.4.14) et le fait que $\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{H},\varepsilon} = 1$ donne que

$$|[v^\varepsilon]| \leq \sqrt{\varepsilon K(\alpha)} \quad (2.4.17)$$

Puisque l'application $[\cdot]$ est continue de $\mathbf{H}^1(S_-) \times \mathbf{H}^1(S_+)$ dans \mathbb{C} comme v^ε converge faiblement vers v^0 dans $\mathbf{H}^1(S_\pm)$, $[v^\varepsilon]$ converge faiblement vers $[v^0]$, donc nous avons

$$[v^0] \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [v^\varepsilon] \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon K(\alpha)} = 0$$

En utilisant alors des fonctions $v \in H^1(S_\pm)$ qui vérifient $[v] = 0$ pour \tilde{a}^ε , et en utilisant la convergence faible, nous avons

$$\int_{S_\pm} \left(\frac{\partial v^0}{\partial \hat{s}} \frac{\partial v^0}{\partial \hat{s}} - \omega^2 v^0 v \right) - \omega v^0(\pm L_\pm) v(\pm L_\pm) = 0 \quad (2.4.18)$$

Le problème (2.4.18) admet une unique solution qui est $v^0 = 0$. Pour conclure, nous avons de nouveau en utilisant la définition de \tilde{a}^ε :

$$\left\| \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \hat{s}} \right\|_{L^2(S_\pm)}^2 + \frac{1}{\varepsilon K(\alpha)} |[v^\varepsilon]|^2 = \Re(\tilde{a}^\varepsilon(v^\varepsilon, \bar{v}^\varepsilon)) + \omega^2 \|v^\varepsilon\|_{L^2(S_\pm)}^2 + \varepsilon \tan(\alpha) [v^\varepsilon]^2$$

Le membre de droite de cette dernière relation converge vers 0 en utilisant l'hypothèse (2.4.16) et la convergence faible de v^ε vers 0 en norme $H^1(S_\pm)$. Nous en déduisons donc que le membre de gauche converge également vers 0. Nous en déduisons finalement que $\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{H},\varepsilon} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (2.4.16). \square

- **Résultat de consistance.** Nous allons démontrer le résultat de consistance suivant :

Proposition 2.4.7. *Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit la fonction $\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon$ donnée par*

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon = \sum_{m=0}^k (\varepsilon \omega)^m \tilde{u}_\pm^m \quad \text{dans } S_\pm$$

Alors nous avons l'estimation d'erreur suivante

$$\|u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon\|_{H^1(S_\pm)} \leq C_k \varepsilon^{k+\frac{1}{2}} \omega^{k+1} \quad (2.4.19)$$

Démonstration de la proposition 2.4.7. Nous partons du fait que $u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon$ est solution d'une équation de Helmholtz homogène sur S_\pm . En multipliant par une fonction test $v \in \mathcal{H}$, et en faisant une intégration par parties sur le terme en Δ , nous obtenons

$$\tilde{a}^\varepsilon(u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon, v) = \sum_{m=0}^k (\varepsilon \omega)^m \left(\frac{1}{\varepsilon K(\alpha)} [\tilde{u}^m][v] + \varepsilon \omega^2 \tan(\alpha) \langle \tilde{u}^m \rangle \langle v \rangle - \left[\frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial \hat{s}} v \right] \right) \quad (2.4.20)$$

Or, nous avons

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial \hat{s}} v \right] = \left[\frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial \hat{s}} \right] \langle v \rangle + \left\langle \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial \hat{s}} \right\rangle [v]$$

et en utilisant les conditions (2.4.12), nous obtenons

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial \hat{s}} v \right] = \omega \tan(\alpha) \langle \tilde{u}^{m-1} \rangle \langle v \rangle + \frac{\omega}{K(\alpha)} [\tilde{u}^{m-1}][v] \quad (2.4.21)$$

En injectant alors (2.4.21) dans (2.4.20), et en faisant une réindexation $m = m - 1$ sur le terme injecté, nous obtenons :

$$\tilde{a}^\varepsilon(u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon, v) = (\varepsilon \omega)^k \frac{\omega}{K(\alpha)} [\tilde{u}^k][v] - \omega \tan(\alpha) (\varepsilon \omega)^{k+1} \langle \tilde{u}^k \rangle \langle v \rangle \quad (2.4.22)$$

Nous utilisons alors les deux inégalités suivantes

$$[v] \leq \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{\mathcal{H},\varepsilon} \quad \text{et} \quad \langle v \rangle \leq C \|v\|_{\mathcal{H},\varepsilon}$$

et le résultat de stabilité du lemme 2.4.6 pour avoir l'estimation (2.4.19). \square

- **Amélioration locale.** En utilisant le résultat de la proposition 2.4.7, nous avons

$$\|u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(S_\pm)} \leq C_k \varepsilon^{k+\frac{1}{2}} \omega^{k+1} \quad (2.4.23)$$

Pour un k donné, nous avons

$$u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon = u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^\varepsilon + (\varepsilon\omega)^{k+1} \tilde{u}^{k+1} \quad (2.4.24)$$

En utilisant alors une inégalité triangulaire sur (2.4.24), nous avons

$$\|u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(S_\pm)} \leq \|u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(S_\pm)} + (\varepsilon\omega)^{k+1} \|\tilde{u}^{k+1}\|_{\mathbb{H}^1(S_\pm)}$$

Nous utilisons alors (2.4.23) avec $k = k + 1$ pour conclure. \square

Pour conclure, nous avons l'estimation suivante :

Théorème 2.4.8. *Quel que soit $0 < \delta < \delta^*$, il existe une constante C_δ indépendante de ε telle que, pour ε suffisamment petit,*

$$\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_\pm^\delta)} \leq C_\delta (\varepsilon\omega)^2 \quad (2.4.25)$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pouvons décomposer $u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}$ sous la forme suivante (où \mathbf{u}_k^ε est la fonction introduite dans le théorème 2.3.9 et $\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon$ est la fonction introduite dans le théorème 2.4.5)

$$u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1} = (u^\varepsilon - \mathbf{u}_k^\varepsilon) + (\mathbf{u}_k^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon) + (\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}) \quad (2.4.26)$$

En prenant une inégalité ‘‘triangulaire’’ (quadrangulaire en fait), nous obtenons

$$\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_\pm^\delta)} \leq \|u^\varepsilon - \mathbf{u}_k^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_\pm^\delta)} + \|\mathbf{u}_k^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_\pm^\delta)} + \|\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_\pm^\delta)} \quad (2.4.27)$$

Pour majorer le premier et le troisième terme, nous utilisons respectivement le théorème 2.3.9 et le théorème 2.4.5. L'inégalité (2.4.27) devient alors

$$\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_\pm^\delta)} \leq C_\delta (\varepsilon\omega)^{k+1} + \|\mathbf{u}_k^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\hat{\Omega}_\pm^\delta)} \quad (2.4.28)$$

Pour finir, nous prenons $k = 1$, en constatant que $\mathbf{u}_1^\varepsilon = \tilde{\mathbf{u}}_1^\varepsilon$. \square

2.4.3 Étude d'un problème de réflexion-transmission

Dans cette section, nous considérons le cas d'une jonction de deux fentes semi-infinies, i.e. $L_\pm = \infty$ et nous regardons le modèle approché, i.e. le problème de Helmholtz homogène pour $\pm\hat{s} > 0$ avec les conditions de transmission (2.4.10) en $\hat{s} = 0$. Nous sommes particulièrement intéressés par le problème de réflexion-transmission, i.e. nous cherchons une solution du problème sous la forme

$$u(\hat{s}) = \begin{cases} \exp(i\omega\hat{s}) + R_\varepsilon(\omega, \alpha) \exp(-i\omega\hat{s}), & \hat{s} < 0 \\ T_\varepsilon(\omega, \alpha) \exp(i\omega\hat{s}), & \hat{s} > 0 \end{cases} \quad (2.4.29)$$

En injectant (2.4.29) dans les conditions de transmission (2.4.10), nous obtenons

$$\begin{cases} T_\varepsilon(\omega, \alpha) + R_\varepsilon(\omega, \alpha) - 1 = \frac{i\varepsilon\omega \tan(\alpha)}{2} (T_\varepsilon(\omega, \alpha) + R_\varepsilon(\omega, \alpha) + 1) \\ T_\varepsilon(\omega, \alpha) - R_\varepsilon(\omega, \alpha) - 1 = \frac{i\varepsilon\omega \tan(\alpha)}{2} (T_\varepsilon(\omega, \alpha) - R_\varepsilon(\omega, \alpha) + 1) \end{cases} \quad (2.4.30)$$

Le système (2.4.30) est bien posé et admet comme solution

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(\omega, \alpha) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \frac{i\varepsilon\omega \tan(\alpha)}{2}}{1 - \frac{i\varepsilon\omega \tan(\alpha)}{2}} + \frac{1 + \frac{i\varepsilon\omega K(\alpha)}{2}}{1 - \frac{i\varepsilon\omega K(\alpha)}{2}} \right) \\ R_\varepsilon(\omega, \alpha) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \frac{i\varepsilon\omega \tan(\alpha)}{2}}{1 - \frac{i\varepsilon\omega \tan(\alpha)}{2}} - \frac{1 + \frac{i\varepsilon\omega K(\alpha)}{2}}{1 - \frac{i\varepsilon\omega K(\alpha)}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

2.4.3.1 Étude détaillée de la fonction \mathcal{W}_α

Nous rappelons que \mathcal{W}_α est la solution du problème donné dans le corollaire 2.3.3, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{W}_\alpha = 0 \quad \text{dans } \widehat{J}_\alpha \\ \frac{\partial \mathcal{W}_\alpha}{\partial n} + T_\pm \mathcal{W}_\alpha = \pm 1 \quad \text{sur } \Sigma_\alpha^\pm \\ \frac{\partial \mathcal{W}_\alpha}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \widehat{J}_\alpha \setminus (\Sigma_\alpha^- \cup \Sigma_\alpha^+) \\ \int_{\widehat{J}_\alpha} \mathcal{W}_\alpha = 0 \end{array} \right. \quad (2.4.32)$$

Nous appelons également Σ_α^0 la droite d'équation par $X + \tan(\alpha)Y = 0$. Cette droite jouera un rôle dans l'étude de la fonction \mathcal{W}_α .

Proposition 2.4.9. *La fonction \mathcal{W}_α est impaire par rapport à l'axe Σ_α^0 .*

Démonstration. Nous avons déjà démontré ce résultat dans la preuve de la proposition 2.2.2, mais nous allons en rappeler les idées principales ici. Si nous appelons Ξ_Σ la symétrie d'axe Σ_α^0 , alors il est facile de voir que la fonction $\mathcal{W}_\alpha \circ \Xi_\Sigma$ satisfait le même problème que la fonction $-\mathcal{W}_\alpha$. En utilisant le caractère bien posé de ce problème, nous en déduisons que ces deux fonctions sont égales, et donc que \mathcal{W}_α est impaire. \square

Corollaire 2.4.10. *La fonction \mathcal{W}_α est nulle sur Σ_α^0 . De plus, nous avons*

$$K(\alpha) = 2 \int_{\Sigma_\alpha^+} \mathcal{W}_\alpha = -2 \int_{\Sigma_\alpha^-} \mathcal{W}_\alpha \quad (2.4.33)$$

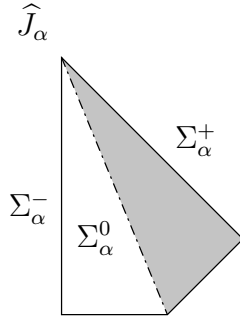
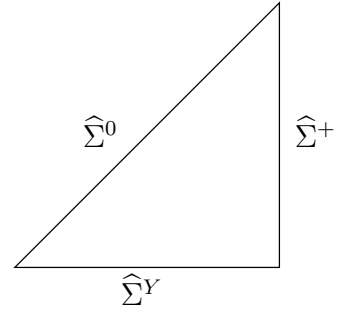
Démonstration. La preuve de ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.9. \square

Notons alors \mathbf{J}_α le domaine défini par (cf. figure 2.6)

$$\mathbf{J}_\alpha = \left\{ \widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{J}_\alpha \text{ tel que } \widehat{\mathbf{x}} \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^t \geq 0 \right\} \quad (2.4.34)$$

Nous faisons alors tourner \mathbf{J}_α autour de l'origine de manière à faire coïncider l'axe Σ_α^+ avec l'axe $\widetilde{X} = 0$. Nous voyons alors que \mathcal{W}_α est solution du problème suivant (dans le nouveau jeu de coordonnées, et en utilisant le corollaire 2.4.10) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{W}_\alpha = 0 \quad \text{dans } \mathbf{J}_\alpha \\ \frac{\partial \mathcal{W}_\alpha}{\partial \widetilde{X}} + T_+ \mathcal{W}_\alpha = 1 \quad \text{sur } \Sigma_\alpha^+ \\ \mathcal{W}_\alpha = 0 \quad \text{sur } \Sigma_\alpha^0 \\ \frac{\partial \mathcal{W}_\alpha}{\partial \widetilde{Y}} = 0 \quad \text{sur } \partial \widehat{J}_\alpha \setminus (\Sigma_\alpha^0 \cup \Sigma_\alpha^+) \end{array} \right. \quad (2.4.35)$$

FIGURE 2.6 – Configuration du domaine \mathbf{J}_α (grisé)FIGURE 2.7 – Configuration du domaine $\widehat{\mathbf{J}}$

Proposition 2.4.11. *Le problème (2.4.35) est bien posé.*

Démonstration. Notons

$$\mathcal{V}_\alpha = \{ \Phi \in H^1(\mathbf{J}_\alpha) \text{ tel que } \Phi = 0 \text{ sur } \Sigma_\alpha^0 \}$$

Nous multiplions la première ligne de (2.4.35) par une fonction test $\Phi \in \mathcal{V}_\alpha$. En faisant une intégration par parties, nous avons

$$\int_{\mathbf{J}_\alpha} \nabla \mathcal{W}_\alpha \nabla \Phi + \int_{\Sigma_\alpha^+} \Phi T_+ \mathcal{W}_\alpha - \int_{\Sigma_\alpha^+} \Phi \quad (2.4.36)$$

Nous utilisons alors le théorème de Lax-Milgram pour conclure (nous utilisons les propriétés sur l'opérateur T_+ données par les propositions A.1.3, A.1.4 et A.1.5; et nous utilisons une inégalité de Poincaré-Wirtinger puisque nous avons une condition de Dirichlet sur un des bords du domaine). \square

Cependant, il est plus judicieux d'étudier la fonction suivante après scaling 1D

$$\Phi_\alpha(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{\tan(\alpha)} \mathcal{W}_\alpha(\tan(\alpha) \tilde{X}, \tilde{Y}) \quad \text{pour } (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \widehat{\mathbf{J}} \quad (2.4.37)$$

où le domaine $\widehat{\mathbf{J}}$ est donné par la figure 2.7. Nous voyons facilement que \mathcal{W}_α est solution de (2.4.35) si et seulement si Φ_α est solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial \tilde{X}^2} + \tan^2(\alpha) \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial \tilde{Y}^2} = 0 \quad \text{dans } \widehat{\mathbf{J}} \\ \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \tilde{X}} + \tan(\alpha) T_+ \Phi_\alpha = 1 \quad \text{sur } \widehat{\Sigma}^+ \\ \Phi_\alpha = 0 \quad \text{sur } \widehat{\Sigma}^0 \\ \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \tilde{Y}} = 0 \quad \text{sur } \widehat{\Sigma}^Y \end{array} \right. \quad (2.4.38)$$

Nous introduisons alors l'espace fonctionnel

$$H_0^1(\widehat{\mathbf{J}}) = \{ \Psi \in H^1(\widehat{\mathbf{J}}) \text{ tel que } \Psi = 0 \text{ sur } \widehat{\Sigma}^0 \} \quad (2.4.39)$$

La formulation variationnelle associée est : trouver $\Phi_\alpha \in H_0^1(\widehat{\mathbf{J}})$ tel que, pour toute fonction test $\Psi \in H_0^1(\widehat{\mathbf{J}})$,

$$\int_{\widehat{\mathbf{J}}} \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \tilde{X}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}} + \tan^2(\alpha) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{Y}} \right) + \tan(\alpha) \int_{\widehat{\Sigma}^+} \Psi T_+ \Phi_\alpha = \int_{\widehat{\Sigma}^+} \Psi \quad (2.4.40)$$

Nous obtenons la trace suivante

$$2 \int_{\widehat{\Sigma}^+} \Phi_\alpha = \frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)} \quad (2.4.41)$$

Nous allons donner ici quelques propriétés sur la fonction Φ

Proposition 2.4.12. *La fonction $\alpha \mapsto \frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)}$ est une fonction décroissante de α .*

Démonstration. En utilisant l'écriture de la trace donnée par (2.4.41), il est naturel d'introduire $\Phi'(\alpha)$ comme étant la dérivée de $\Phi(\alpha)$ par rapport à α . En dérivant la formulation variationnelle (2.4.40) par rapport à α , nous avons : trouver $\Phi'(\alpha) \in H_0^1(\widehat{\mathbf{J}})$ tel que, pour toute fonction test $\Psi \in H_0^1(\widehat{\mathbf{J}})$,

$$\left| \int_{\widehat{\mathbf{J}}} \left(\frac{\partial \Phi'_\alpha}{\partial \widetilde{X}} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{X}} + \tan^2(\alpha) \frac{\partial \Phi'_\alpha}{\partial \widetilde{Y}} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{Y}} \right) + 2 \tan(\alpha) (1 + \tan^2(\alpha)) \int_{\widehat{\mathbf{J}}} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \widetilde{Y}} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{Y}} \right. \\ \left. + \tan(\alpha) \int_{\widehat{\Sigma}^+} \Psi T_+ \Phi'_\alpha + (1 + \tan^2(\alpha)) \int_{\widehat{\Sigma}^+} \Psi T_+ \Phi_\alpha = 0 \right. \quad (2.4.42)$$

L'idée est d'utiliser (2.4.40) avec la fonction test $\Psi = \Phi'_\alpha$, (2.4.42) avec la fonction test $\Psi = \Phi_\alpha$, et de faire la différence entre ces deux formulations variationnelles. D'après la proposition A.1.5, nous avons

$$\int_{\widehat{\Sigma}^+} \Phi_\alpha T_+ \Phi'_\alpha = \int_{\widehat{\Sigma}^+} \Phi'_\alpha T_+ \Phi_\alpha$$

Les calculs nous donnent alors

$$\int_{\widehat{\Sigma}^+} \Phi'_\alpha = -2 \tan(\alpha) (1 + \tan^2(\alpha)) \left\| \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \widetilde{Y}} \right\|_{L^2(\widehat{\mathbf{J}})}^2 - (1 + \tan^2(\alpha)) \int_{\widehat{\Sigma}^+} \Phi_\alpha T_+ \Phi_\alpha \quad (2.4.43)$$

En dérivant la relation (2.4.41) par rapport à α , et en utilisant la positivité de l'opérateur T_+ (donnée par la proposition A.1.4), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)} \right) \leq 0$$

□

Proposition 2.4.13. *Lorsque α tend vers 0, la fonction Φ_α converge (au moins au sens de la norme L^2) vers la fonction $\Phi_0 : (\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \mapsto \widetilde{X} - \widetilde{Y}$; et nous avons de plus $K(\alpha) \sim \tan(\alpha)$ au voisinage de $\alpha = 0$.*

Démonstration. Nous allons démontrer cette proposition en deux étapes. Tout d'abord nous montrons que formellement la limite Φ_0 est la fonction $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \mapsto \widetilde{X} - \widetilde{Y}$. Nous partons de la formulation variationnelle (2.4.40), et nous prenons formellement $\alpha = 0$. Alors la formulation variationnelle limite que nous obtenons est : trouver $\Phi_0 \in H_0^1(\widehat{\mathbf{J}})$ tel que, pour toute fonction test $\Psi \in H_0^1(\widehat{\mathbf{J}})$,

$$\int_{\widehat{\mathbf{J}}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \widetilde{X}} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{X}} = \int_{\widehat{\Sigma}^+} \Psi \quad (2.4.44)$$

Le problème associé est :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \widetilde{X}^2} = 0 & \text{dans } \widehat{\mathbf{J}} \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \widetilde{X}} = 1 & \text{sur } \widehat{\Sigma}^+ \\ \Phi_0 = 0 & \text{sur } \widehat{\Sigma}^0 \end{cases} \quad (2.4.45)$$

Le problème (2.4.45) est bien posé et admet comme unique solution $\Phi_0 : (\tilde{X}, \tilde{Y}) \mapsto \tilde{X} - \tilde{Y}$. Nous pouvons alors voir que la valeur de la trace de Φ_0 sur $\hat{\Sigma}^+$ est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour prouver que Φ_α converge vers Φ_0 , nous faisons la différence entre les deux formulations variationnelles (2.4.40) et (2.4.44), et nous obtenons

$$\left| \int_{\hat{\mathbf{J}}} \left(\frac{\partial(\Phi_\alpha - \Phi_0)}{\partial \tilde{X}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}} + \tan^2(\alpha) \frac{\partial(\Phi_\alpha - \Phi_0)}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{Y}} \right) + \tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Psi T_+(\Phi_\alpha - \Phi_0) = -\tan^2(\alpha) \int_{\hat{\mathbf{J}}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{Y}} - \tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Psi T_+ \Phi_0 \right. \quad (2.4.46)$$

Nous regardons le problème (2.4.46) avec la norme à poids

$$\|\Psi\|_{H_\alpha^1(\hat{\mathbf{J}})}^2 = \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}} \right\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}})}^2 + \tan^2(\alpha) \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{Y}} \right\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}})}^2 + \tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Psi T_+ \Psi \quad (2.4.47)$$

Notons qu'à $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ fixé, la norme définie par (2.4.47) est équivalente à la norme classique $H^1(\hat{\mathbf{J}})$ pour les fonctions dans $H_0^1(\hat{\mathbf{J}})$, grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Nous prenons comme fonction test $\Psi = \Phi_\alpha - \Phi_0$ dans (2.4.46). Nous pouvons voir que le membre de gauche devient égal à $\|\Phi_\alpha - \Phi_0\|_{H_\alpha^1(\hat{\mathbf{J}})}^2$. Pour le membre de droite, le premier terme se majore en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Le second terme se majore en utilisant A.1.6. Finalement, nous pouvons majorer le membre de droite de (2.4.46) par

$$\left(\tan(\alpha) \left\| \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tilde{Y}} \right\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}})} + \sqrt{\tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Phi_0 T_+ \Phi_0} \right) \|\Phi_\alpha - \Phi_0\|_{H_\alpha^1(\hat{\mathbf{J}})}$$

Nous obtenons donc la majoration

$$\|\Phi_\alpha - \Phi_0\|_{H_\alpha^1(\hat{\mathbf{J}})} \leq \left(\tan(\alpha) \left\| \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tilde{Y}} \right\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}})} + \sqrt{\tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Phi_0 T_+ \Phi_0} \right) \quad (2.4.48)$$

Nous en déduisons alors que $\|\Phi_\alpha - \Phi_0\|_{H_\alpha^1(\hat{\mathbf{J}})}$ tend vers 0 quand α tend vers 0. Nous en déduisons en particulier que $\left\| \frac{\partial(\Phi_\alpha - \Phi_0)}{\partial \tilde{X}} \right\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}})}$ tend vers 0 quand α tend vers 0. Pour conclure, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 2.4.14. *Pour toute fonction $\Psi \in H_0^1(\hat{\mathbf{J}})$, nous avons*

$$\|\Psi\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}})} \leq 2 \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}} \right\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}})} \quad (2.4.49)$$

Nous obtenons alors $\|\Phi_\alpha - \Phi_0\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}})}$ tend vers 0 quand α tend vers 0. Nous utilisons également un second lemme

Lemme 2.4.15. *Pour toute fonction $\Psi \in H_0^1(\hat{\mathbf{J}})$, nous avons*

$$\|\Psi\|_{L^1(\hat{\Sigma}^+)} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}} \right\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}})} \quad (2.4.50)$$

Nous obtenons alors $\|\Phi_\alpha - \Phi_0\|_{L^1(\hat{\Sigma}^+)}$. Or nous avons

$$\|\Phi_\alpha - \Phi_0\|_{L^1(\hat{\Sigma}^+)} \leq \left| \int_{\hat{\Sigma}^+} \Phi_\alpha - \Phi(0) \right| = \left| \frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)} - 1 \right|$$

D'où le résultat. \square

Démonstration du lemme 2.4.14. La démonstration de ce lemme est similaire à la démonstration de l'inégalité de Poincaré. Nous utilisons une inégalité de la moyenne pour écrire (en sachant que $\Psi(\tilde{X}, \tilde{X}) = 0$ puisque $\Psi \in H_0^1(\hat{\mathbf{J}})$) :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\mathbf{J}}} |\Psi(\tilde{X}, \tilde{Y})|^2 d\tilde{X} d\tilde{Y} &\leq \int_{-1}^0 \int_{\tilde{Y}}^0 2 \int_{\tilde{Y}}^{\tilde{X}} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}}(z, \tilde{Y}) \right| |\Psi(z, \tilde{Y})| dz d\tilde{X} d\tilde{Y} \\ &\leq \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 2 \int_{\tilde{Y}}^0 \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}}(z, \tilde{Y}) \right| |\Psi(z, \tilde{Y})| dz d\tilde{X} d\tilde{Y} \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale ne dépend plus de \tilde{X} , et on obtient le résultat souhaité en utilisant une inégalité de Cauchy-Schwartz. \square

Démonstration du lemme 2.4.15. Nous utilisons l'inégalité de la moyenne

$$\int_{\hat{\Sigma}^+} |\Psi| = \int_{-1}^0 |\Psi(0, \tilde{Y})| d\tilde{Y} \leq \int_{-1}^0 \int_{\tilde{Y}}^0 \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \right| d\tilde{X} d\tilde{Y}$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour conclure. \square

Remarque 2.4.16. Nous avons prouvé dans la proposition 2.4.13 que la norme L^2 de la dérivée de $\Phi_\alpha - \Phi_0$ par rapport à \tilde{X} tend vers 0, quand α tend vers 0. Nous pouvons nous demander pour quelle valeur de $s \in \mathbb{R}$ la norme $\|\Phi_\alpha - \Phi_0\|_{H^s(\hat{\mathbf{J}})}$ tend vers 0 quand α tend vers 0. Nous pouvons remarquer que

$$\left\| \frac{\partial(\Phi_\alpha - \Phi_0)}{\partial \tilde{Y}} \right\|_{L^2(\hat{\Sigma}^Y)} = 1$$

En utilisant un résultat de trace, nous pouvons dire que pour $s \geq \frac{3}{2}$, la norme $\|\Phi_\alpha - \Phi_0\|_{H^s(\hat{\mathbf{J}})}$ ne tend pas vers 0 quand α tend vers 0.

Corollaire 2.4.17. *Pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, nous avons $K(\alpha) \leq \tan(\alpha)$.*

Démonstration. Nous savons que la fonction $\alpha \mapsto \frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)}$ est décroissante grâce à la proposition 2.4.12. Cette fonction est donc majorée par sa valeur en $\alpha = 0$ qui vaut 1 d'après la proposition 2.4.13. \square

Proposition 2.4.18. *Quand α tend vers $\frac{\pi}{2}$, la fonction Φ_α converge (au moins au sens de la norme L^2) vers la fonction $\Phi_{\frac{\pi}{2}} : (\tilde{X}, \tilde{Y}) \mapsto 0$; et nous avons de plus $K(\alpha) = o(\tan(\alpha))$ au voisinage de $\alpha = \frac{\pi}{2}$.*

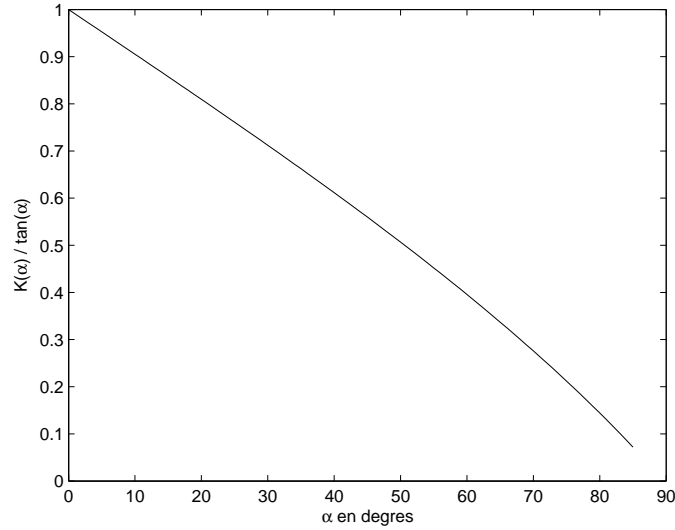
Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à la preuve de la proposition 2.4.13, au détail près que l'on divise d'abord (2.4.40) par $\tan^2(\alpha)$. \square

Les résultats des propositions 2.4.12, 2.4.13, 2.4.17 et 2.4.18 sont visualisables sur la figure 2.8.

2.4.3.2 Étude de la réflexion et de la transmission pour de petites valeurs de $\varepsilon\omega$

À α fixé, pour de petites valeurs de $\varepsilon\omega$, nous pouvons utiliser des développements de Taylor dans (2.4.31), et nous obtenons les expressions suivantes (en négligeant le terme en $O(\varepsilon\omega)^2$)

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(\omega, \alpha) &= 1 + \frac{i\varepsilon\omega}{2} (\tan(\alpha) + K(\alpha)) \\ R_\varepsilon(\omega, \alpha) &= \frac{i\varepsilon\omega}{2} (\tan(\alpha) - K(\alpha)) \end{aligned} \tag{2.4.51}$$

FIGURE 2.8 – Tracé de $\frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)}$ en fonction de α

Une conséquence de l'écriture (2.4.51) est que nous avons les estimations

$$|R_\varepsilon(\omega, \alpha)| = O(\varepsilon\omega) \quad \text{et} \quad |T_\varepsilon(\omega, \alpha)| = 1 + O((\varepsilon\omega)^2) \quad (2.4.52)$$

Une conséquence immédiate est que l'effet de la géométrie de la jonction sur le coefficient de réflexion est plus visible que l'effet de la géométrie de la jonction sur le coefficient de transmission. De plus, nous avons

$$|R_\varepsilon(\omega, \alpha)| = \frac{\varepsilon\omega}{2} |\tan(\alpha) - K(\alpha)|$$

Proposition 2.4.19. *La fonction $\alpha \mapsto \tan(\alpha) - K(\alpha)$ est une fonction croissante de α .*

Démonstration. Nous utilisons les informations connues sur la fonction $\alpha \mapsto \frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)}$, pour écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\tan(\alpha) - K(\alpha)) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\tan(\alpha) \left(1 - \frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)} \right) \right) \\ &= (1 + \tan^2(\alpha)) \left(1 - \frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)} \right) - \tan(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

en utilisant les résultats de la proposition 2.4.12 et du corollaire 2.4.17. □

Problème d'acoustique dans une jonction de N fentes

Résumé

Dans ce chapitre, puisque les conditions de Kirchhoff améliorées obtenues dans le chapitre précédent se comportent en $i\omega$ vis-à-vis de la fréquence, il peut être tentant d'écrire un modèle temporel en remplaçant directement $-i\omega$ par une dérivée par rapport au temps, en utilisant par exemple une transformée de Fourier inverse. Toutefois, les écritures d'hypothèses et les résultats d'estimation obtenus le sont pour $\varepsilon\omega$ petit (et pas seulement pour ε petit), donc à ε fixé (i.e. à géométrie fixée), il n'est pas possible de faire tendre ω vers l'infini. Nous allons montrer toutefois que nous pouvons directement écrire notre modèle asymptotique en temporel.

De plus, nous considérons ici une généralisation de la géométrie introduite au chapitre précédent en ne considérant plus une jonction de deux fentes de même épaisseur, mais une jonction de N fentes minces d'épaisseur proportionnelles à ε . Nous gardons le même plan que dans le chapitre précédent, étant donné que le problème se traite de la même manière.

Sommaire

3.1	Modélisation du problème	55
3.1.1	Géométrie du problème considéré	55
3.1.2	Découpage canonique du domaine	57
3.1.3	Le problème 1D limite	59
3.2	Développements asymptotiques	60
3.2.1	Décomposition de domaines avec recouvrement	60
3.2.2	Développements asymptotiques et équations basiques	61
3.2.3	Conditions de raccord	62
3.3	Justification des développements formels et estimations d'erreurs	67
3.3.1	Existence et unicité des développements formels	67
3.3.2	Estimations d'erreurs	77
3.4	Construction et analyse des conditions de Kirchhoff améliorées	81
3.4.1	Construction des conditions de Kirchhoff	81
3.4.2	Analyse des conditions de Kirchhoff	86

3.1 Modélisation du problème

3.1.1 Géométrie du problème considéré

Nous considérons ici un domaine composé d'une réunion de N jonctions droites (cf. la partie de droite de la figure 3.1). Plus précisément, nous considérons la réunion de :

- N petit rectangles dont le $i^{\text{ème}}$ a pour longueur L_i et pour largeur $\beta_i \varepsilon$,
- une zone de jonction J^ε telle que $J^\varepsilon = \varepsilon \widehat{J}$, avec \widehat{J} indépendant de ε .

Une caractéristique géométrique est l'aire de la section relative β_i de la fente. *A contrario*, il est possible de construire une famille de modèles en partant d'une réunion de N segments 1D $(S_i)_{1 \leq i \leq N}$ de longueurs respectives L_i qui partagent l'origine du repère en commun, comme par exemple sur partie de gauche de la figure 3.1, d'épaissir ces segments symétriquement de manière à obtenir des rectangles dont les dimensions sont respectivement L_i et $\beta_i \varepsilon$, et d'y ajouter un domaine de la forme $J^\varepsilon = \varepsilon \widehat{J}$, avec \widehat{J} indépendant de ε , afin d'obtenir un domaine qui ressemble à la partie de droite de la figure 3.1.

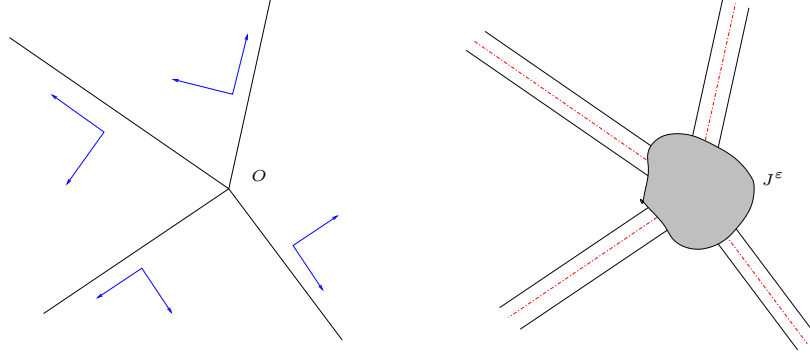


FIGURE 3.1 – Configuration du domaine pour le cas général

Remarque 3.1.1. Le choix de géométrie fait ici est d'épaissir symétriquement le domaine 1D pour en faire un domaine 2D dépendant de ε . Dans le chapitre 2, la construction que nous faisons est d'épaissir d'un seul côté le domaine 1D pour en faire un domaine 2D dépendant de ε . Nous verrons dans la section 3.4 que ce choix aura une conséquence sur la construction des conditions de Kirchhoff améliorées.

Sur chaque segment S_i , nous introduisons le vecteur unitaire \mathbf{t}^i tel que

$$S_i = \hat{s}_i \mathbf{t}^i, \quad 0 < \hat{s}_i < L_i \quad (3.1.1)$$

et nous introduisons le vecteur \mathbf{n}^i qui est le vecteur \mathbf{t}^i tourné de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique (les vecteurs \mathbf{t}^i et \mathbf{n}^i sont représentés en bleu sur la figure 3.1). Analytiquement, nous avons

$$\Omega^\varepsilon = \varepsilon \widehat{J} \cup \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon \cup \dots \cup \Omega_N^\varepsilon \quad (3.1.2)$$

où \widehat{J} est la jonction canonique que nous avons introduite ci-dessus, et Ω_i est donné par

$$\Omega_i^\varepsilon = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / 0 < \pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^i < L_i, -\frac{\beta_i \varepsilon}{2} < \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^i < \frac{\beta_i \varepsilon}{2} \right\} \quad (3.1.3)$$

Sur ce domaine que nous noterons Ω^ε , nous considérons le problème suivant : trouver $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^1(\Omega_\alpha^\varepsilon)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega_\alpha^\varepsilon))$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega^\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial \Omega^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0, \cdot) = f^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0, \cdot) = g^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \end{array} \right. \quad (3.1.4)$$

avec $(f^\varepsilon, g^\varepsilon) \in H^1(\Omega^\varepsilon) \times L^2(\Omega^\varepsilon)$ vérifient l'hypothèse 3.1.8 qui sera décrite plus tard. Pour ce système, il est naturel d'associer l'énergie suivante

$$\mathcal{E}^\varepsilon(t, u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \quad (3.1.5)$$

Proposition 3.1.2. *La solution u^ε du problème (3.1.4) vérifie la relation d'énergie*

$$\mathcal{E}^\varepsilon(t, u^\varepsilon) = \mathcal{E}^\varepsilon(0, u^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 + |g^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

Démonstration. Nous multiplions la première ligne de (3.1.4) par la dérivée de u^ε par rapport au temps, on intègre le terme en $-\Delta u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ et on utilise la condition de Neumann donnée par la seconde ligne de (3.1.4). Nous obtenons donc

$$\frac{\partial \mathcal{E}^\varepsilon}{\partial t}(t, u^\varepsilon) = 0$$

Nous en déduisons donc que $\mathcal{E}^\varepsilon(t, u^\varepsilon)$ est une quantité indépendante du temps, nous utilisons alors les troisième et quatrième lignes de (3.1.4) pour obtenir la valeur initiale. \square

Remarque 3.1.3. Pour certains résultats, nous nous placerons dans le cas particulier $L_i = +\infty$ pour tout i (notamment pour le lemme 3.3.6). Toutefois, les conditions de Kirchhoff (que ce soit les conditions classiques ou les conditions améliorées obtenue dans la section 3.4) sont locales, et leur écriture ne dépend ni du choix de L_i , ni de la condition que l'on met.

3.1.2 Découpage canonique du domaine

Contrairement à ce que nous avons vu lors du choix du domaine dans le chapitre 2, les différents éléments constituant le domaine se recoupent (ne serait-ce qu'au niveau des domaines de fente, cf. figure 3.2). Outre les changements de variable que nous allons introduire ici, nous allons introduire un nouveau découpage géométrique de ce domaine.

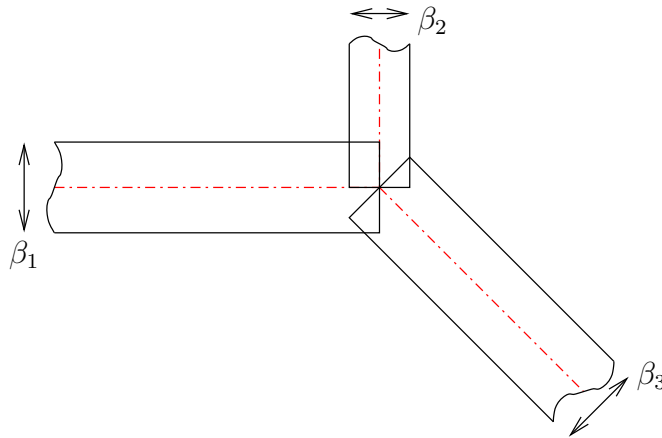


FIGURE 3.2 – Domaine limite (en rouge) et domaines de fentes canoniques

Définition 3.1.4 (Changements de variable). Sur chacun des $N + 1$ domaines $(\Omega_1^\varepsilon, \dots, \Omega_N^\varepsilon)$ et J^ε , nous définissons les changements de variable cartésiens suivants :

- le changement de variable $\Xi_i^\varepsilon : \widehat{\Omega}_i =]0, L_i[\times]-\frac{\beta_i}{2}, \frac{\beta_i}{2}[\rightarrow \Omega_i^\varepsilon$ et qui à tout couple $(\hat{s}_i, \hat{\nu}_i) \in \widehat{\Omega}_i$ associe

$$\Xi_i^\varepsilon(\hat{s}_i, \hat{\nu}_i) = \hat{s}_i \mathbf{t}^i + \varepsilon \hat{\nu}_i \mathbf{n}^i \quad (3.1.6)$$

- le changement de variable $\Xi_J^\varepsilon : \widehat{J} \rightarrow J^\varepsilon$, et qui à $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{J}_\alpha$ associe

$$\Xi_J^\varepsilon(\widehat{\mathbf{x}}) = \varepsilon \widehat{\mathbf{x}} \quad (3.1.7)$$

Définition 3.1.5 (Définition de σ_i). Nous introduisons σ_i , pour $1 \leq i \leq N$, comme étant la plus petite valeur pour laquelle

$$\{\mathbf{x} \in \Omega_i^\varepsilon \text{ tel que } \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^i \geq \varepsilon \sigma_i\} \cap \left(J^\varepsilon \cup \bigcup_{j \neq i} \Omega_j^\varepsilon \right) = \emptyset \quad (3.1.8)$$

Pour ε petit, σ_i ne dépend pas du choix de ε . Un exemple de construction des σ_i est donné par la figure 3.3 dans le cas d'une jonction de 3 fentes.

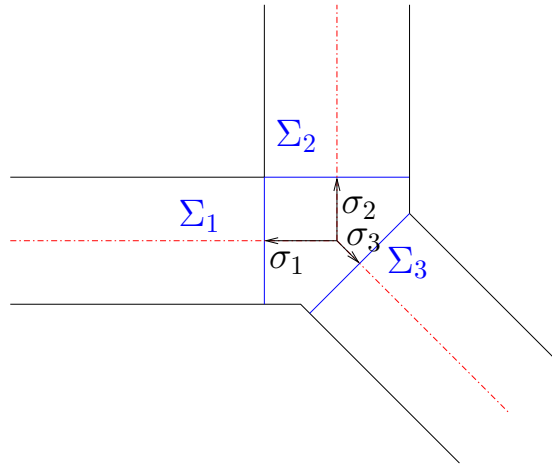


FIGURE 3.3 – Exemple de σ_i dans le cas d'une jonction de 3 fentes (domaine scalé)

Définition 3.1.6 (Nouveau découpage géométrique). Grâce à la définition des σ_i donnée par 3.1.5, nous pouvons définir les espaces géométriques suivants :

- nous définissons la zone de fente extérieure $\Omega_{i,\text{ext}}^\varepsilon$, pour $1 \leq i \leq N$, par

$$\Omega_{i,\text{ext}}^\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega_i^\varepsilon \ / \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}_i > \varepsilon \sigma_i\}$$

- nous définissons la nouvelle zone de jonction $\widetilde{J}^\varepsilon$ par

$$\widetilde{J}^\varepsilon = J^\varepsilon \cup \bigcup_{i=1}^N \{\mathbf{x} \in \Omega_i^\varepsilon \ / \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}_i < \varepsilon \sigma_i\}$$

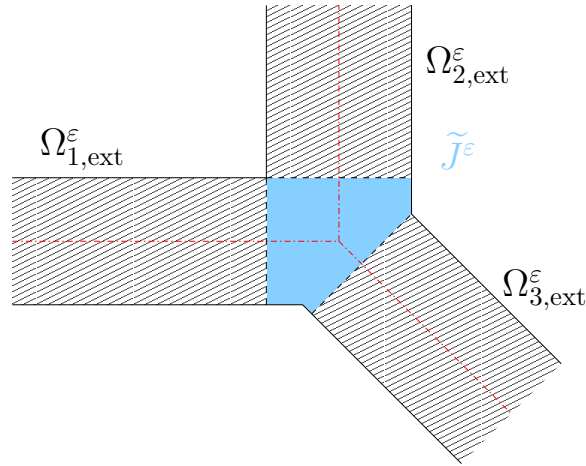
Un exemple de découpage est donné par la figure 3.4.

Nous pouvons remarquer que nous avons toujours

$$\overline{\Omega^\varepsilon} = \overline{\Omega_{1,\text{ext}}^\varepsilon} \cup \overline{\Omega_{2,\text{ext}}^\varepsilon} \cup \dots \cup \overline{\Omega_{N,\text{ext}}^\varepsilon} \cup \overline{\widetilde{J}^\varepsilon}$$

avec les ensembles deux à deux disjoints ce coup-ci, et nous gardons le fait que $\widetilde{J}^\varepsilon = \varepsilon \widehat{J}$, où \widehat{J} est un domaine fixé de \mathbb{R}^2 .

Remarque 3.1.7. Dans toute la suite de ce chapitre, lorsque nous parlerons de la jonction normalisée \widehat{J} , nous parlerons de la jonction normalisée obtenue à partir de la définition 3.1.6.

FIGURE 3.4 – Configuration des nouveaux ensembles $\Omega_{i,\text{ext}}^\varepsilon$ et \tilde{J}^ε

3.1.3 Le problème 1D limite

Quand ε tend vers 0, le domaine Ω^ε “dégénère” et devient un domaine 1D, qui n’est autre que la réunion des segments S_i . Pour écrire le modèle limite, nous allons faire des hypothèses sur les fonctions f^ε et g^ε :

Hypothèse 3.1.8. Les fonctions f^ε et g^ε satisfont les propriétés suivantes :

- pour ε assez petit, $f^\varepsilon = g^\varepsilon = 0$ sur J^ε ,
- il existe deux fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} définies dans $H^1(S_1) \times H^1(S_2) \times \cdots \times H^1(S_N)$ telles que

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^i) \quad \text{et} \quad g^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^i) \quad \text{pour} \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^\varepsilon$$

Sous cette hypothèse, il est facile de voir que pour ε petit,

$$\mathcal{E}^\varepsilon(0, t) = \sum_{i=1}^N \beta_i \int_{S_i} \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{s}_i} \right|^2 (\hat{s}) + |\mathbf{g}|^2 (\hat{s}) d\hat{s} \quad (3.1.9)$$

Proposition 3.1.9. Sous l’hypothèse 3.1.8, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, la fonction u^ε converge vers une fonction u^0 solution du problème suivant (en notant u_i^0 la restriction de u^0 à S_i) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} - \Delta u_i^0 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_+^* \times S_i, \forall 1 \leq i \leq N \\ u_i^0(t, \cdot) = \mathbf{f}_i \quad \text{sur} \quad S_i, \forall 1 \leq i \leq N \\ \frac{\partial u_i^0}{\partial t}(t, \cdot) = \mathbf{g}_i \quad \text{sur} \quad S_i, \forall 1 \leq i \leq N \end{array} \right. \quad (3.1.10)$$

Démonstration. La preuve de cette proposition est une conséquence de l’étude de l’estimation d’erreur faite dans la section 3.3.2. \square

3.2 Développements asymptotiques

3.2.1 Décomposition de domaines avec recouvrement

3.2.1.1 Découpages géométriques

Nous rappelons ici la définition de la classe de fonction \mathcal{C} , donnée par (2.2.8) :

$$\mathcal{C} = \left\{ \varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon) = 0 \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon |\ln(\varepsilon)|} = +\infty \right\}$$

Étant donnée $\varphi \in \mathcal{C}$, nous définissons

- les zones de fentes $\Omega_i(\varepsilon)$ données par (ce sont les zones grisées sur la partie gauche de la figure 3.5)

$$\Omega_i(\varepsilon) = \{ \mathbf{x} \in \Omega_i^\varepsilon \ / \ \varphi(\varepsilon) \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}_i \} \quad (\subset \Omega_i^\varepsilon) \quad (3.2.1)$$

- la zone de jonction $J(\varepsilon)$ donnée par (c'est la zone grisée sur la partie droite de la figure 3.5)

$$J(\varepsilon) = \varepsilon \hat{J} \cup \bigcup_{i=1}^N \{ \mathbf{x} \in \Omega_i^\varepsilon \ / \ 0 \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^i < 2\varphi(\varepsilon) \} \quad (\supset J^\varepsilon) \quad (3.2.2)$$



FIGURE 3.5 – Zones de fente $\Omega_i(\varepsilon)$ (figure de gauche) et zone de jonction $J(\varepsilon)$ (figure de droite).

Les différentes zones de fentes données par (3.2.1) d'une part, et la zone de jonction donnée par (3.2.2) d'autre part, ont des zones de recouvrement $\{\mathcal{O}_i(\varepsilon)\}_{1 \leq i \leq N}$, définies par

$$\mathcal{O}_i(\varepsilon) = \Omega_i(\varepsilon) \cap J(\varepsilon) = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega_i^\varepsilon \ / \ \varphi(\varepsilon) < \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^i < 2\varphi(\varepsilon) \text{ et } -\frac{\beta_i \varepsilon}{2} < \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^i < \frac{\beta_i \varepsilon}{2} \right\} \quad (3.2.3)$$

3.2.1.2 Changements de variables

Nous reprenons les changements de variables Ξ_i^ε , pour $1 \leq i \leq N$, et Ξ_j^ε définis de la même manière que dans la définition 3.1.4, et nous introduisons les domaines normalisés suivants :

- $\hat{\Omega}_i(\varepsilon) = (\Xi_i^\varepsilon)^{-1} \Omega_i(\varepsilon)$ est le rectangle donné par

$$\hat{\Omega}_i(\varepsilon) =]\varphi(\varepsilon), L_i[\times \left] -\frac{\beta_i}{2}, \frac{\beta_i}{2} \right[\quad (3.2.4)$$

Notons que $\hat{\Omega}_i(\varepsilon)$ est un domaine croissant quand ε est décroissant, et tend vers le domaine limite $\hat{\Omega}_i$ quand ε tend vers 0.

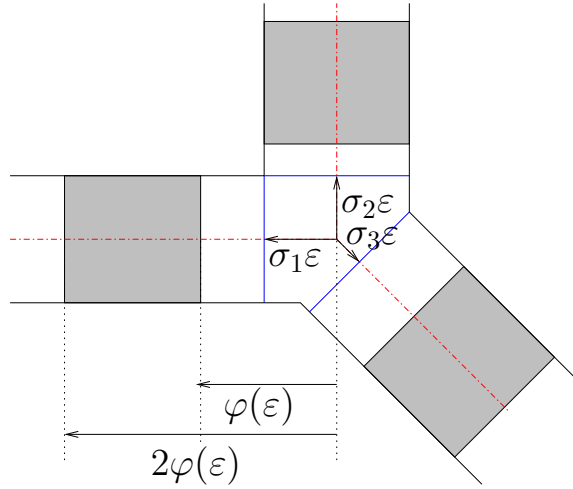


FIGURE 3.6 – Zones de recouvrement $\mathcal{O}_i(\varepsilon)$

- $\hat{\mathcal{J}}(\varepsilon)$ est la jonction normalisée définie par

$$\hat{\mathcal{J}}(\varepsilon) = (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} J(\varepsilon) \quad (3.2.5)$$

Notons que $\hat{\mathcal{J}}(\varepsilon)$ est un domaine croissant quand ε est décroissant, et tend vers le domaine semi-infini $\hat{\mathcal{J}}^\infty$ quand ε tend vers 0, donné par

$$\hat{\mathcal{J}}^\infty = \hat{\mathcal{J}} \cup \hat{B}_1 \cup \dots \cup \hat{B}_N \quad (3.2.6)$$

où les fentes semi-infinies $(\hat{B}_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont données par

$$\hat{B}_i = \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}^i > \sigma_i \text{ et } -\frac{\beta_i}{2} < \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}^i < \frac{\beta_i}{2} \right\} \quad (3.2.7)$$

3.2.2 Développements asymptotiques et équations basiques

Nous formulons ici notre ansatz pour les développements asymptotiques qui consiste, dans chaque zone après scaling, à développer u^ε en puissance de ε . En d'autres mots :

Hypothèse 3.2.1. Il existe des familles de fonctions $(u_1^k, \dots, u_N^k, U^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \left(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^1(\hat{\Omega}_1)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\hat{\Omega}_1)) \right) \times \dots \times \left(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^1(\hat{\Omega}_N)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\hat{\Omega}_1)) \right) \times \left(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H_{\text{loc}}^1(\hat{\mathcal{J}})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L_{\text{loc}}^2(\hat{\mathcal{J}})) \right)$ indépendantes de ε telles que

$$u^\varepsilon(t, \Xi_i^\varepsilon(\hat{s}_i, \hat{\nu}_i)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k u_i^k(t, \hat{s}_i, \hat{\nu}_i) + o(\varepsilon^\infty) \quad \text{dans } \hat{\Omega}_i(\varepsilon) \quad (3.2.8-(i))$$

$$u^\varepsilon(t, \Xi_J^\varepsilon(\hat{\mathbf{x}})) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k U^k(t, \hat{\mathbf{x}}) + o(\varepsilon^\infty) \quad \text{dans } \hat{\mathcal{J}}(\varepsilon) \quad (3.2.8-(ii))$$

Il reste à obtenir les équations qui permettront de déterminer les fonctions u_i^k et U^k . Pour les fonctions u_i^k , nous substituons formellement (3.2.8-(i)) dans l'équation des ondes 2D (3.1.4) une fois le changement de variable $(\Xi_i^\varepsilon)^{-1}$ effectué, et nous identifions les termes avec la même puissance de ε

(d'après l'hypothèse 3.2.1, les termes du développement ne dépendent pas de ε). Nous obtenons assez simplement

$$\frac{\partial^2 u_i^0}{\partial \hat{\nu}_i^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial \hat{\nu}_i^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial \hat{s}_i^2} - \frac{\partial^2 u_i^{k+2}}{\partial \hat{\nu}_i^2} = 0, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2.9)$$

et nous obtenons les conditions de bord "latérales" suivantes

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial \hat{\nu}}(t, \hat{s}_i, -\frac{\beta_i}{2}) = \frac{\partial u_i^k}{\partial \hat{\nu}}(t, \hat{s}_i, \frac{\beta_i}{2}) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \hat{s}_i > 0, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2.10)$$

Nous pouvons déjà donner un résultat partiel sur les familles de fonctions $(u_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$:

Proposition 3.2.2. *Soit $(u_i^k, u_+^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^1(\widehat{\Omega}_i)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\widehat{\Omega}_i))$ satisfaisant (3.2.9) et (3.2.10); alors*

$$u_i^k(t, \hat{s}_i, \hat{\nu}) = u_i^k(\hat{s}_i), \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \hat{s}_i \in]0, L_i[, \quad \hat{\nu}_i \in \left] -\frac{\beta_i}{2}, \frac{\beta_i}{2} \right[, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2.11-(i))$$

$$\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2}(t, \hat{s}_i) - \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial \hat{s}_i^2}(t, \hat{s}_i) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \hat{s}_i \in]0, L_i[, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2.11-(ii))$$

Démonstration. La preuve de la proposition 3.2.2 est identique à la preuve de la proposition 2.2.4. \square

Pour obtenir les équations pour les termes U^k , nous substituons formellement le développement (3.2.8-(ii)) dans l'équation des ondes 2D (3.1.4), nous effectuons le changement de variable $(\Xi_j^\varepsilon)^{-1}$, et nous identifions les termes avec la même puissance de ε . Nous voyons alors que la famille des fonctions U^k satisfait des équations de Laplace emboîtées¹

$$\Delta U^0 = 0, \quad \Delta U^1 = 0, \quad \Delta U^k = \frac{\partial^2 U^{k-2}}{\partial t^2}, \quad k \geq 2, \quad \text{dans } \widehat{\mathcal{J}}^\infty \quad (3.2.12)$$

avec les conditions de Neumann suivantes

$$\frac{\partial U^k}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\mathcal{J}}^\infty, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2.13)$$

3.2.3 Conditions de raccord

De la même manière que pour le cas harmonique, nous avons besoin de conditions de raccord reliant le comportement en $\hat{s}_i = 0$ des fonctions u_i^k et le comportement à l'infini des fonctions U^k . Pour cela, il est de nouveau utile de connaître la forme des fonctions U^k dans les fentes semi-infinies \widehat{B}_i : c'est l'objectif de la prochaine section.

3.2.3.1 Écriture modale des solutions des équations de Laplace emboîtées

Nous définissons \widehat{B}_i par les coordonnées locales $(\hat{s}_i, \hat{\nu}_i) = (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}^i, \widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}^i)$ de telle manière que

$$\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{B}_i \iff (\hat{s}_i, \hat{\nu}_i) \in]\sigma_i, +\infty[\times \left] -\frac{\beta_i}{2}, \frac{\beta_i}{2} \right[\quad (3.2.14)$$

Considérons $(U_i^k)_{k \geq 0} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, H_{\text{loc}}^1(\widehat{B}_i, \mathbb{C})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, L_{\text{loc}}^2(\widehat{B}_i, \mathbb{C}))$ solution des équations de Laplace emboîtées suivantes

$$\Delta U_i^0 = 0, \quad \Delta U_i^1 = 0, \quad \Delta U_i^{k+2} = \frac{\partial^2 U_i^k}{\partial t^2} = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \widehat{B}_i, \quad \frac{\partial U_i^k}{\partial \hat{\nu}} = 0, \quad \text{pour } \hat{\nu}_i = \pm \frac{\beta_i}{2}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2.15)$$

1. Par analogie au chapitre 2, nous parlons ici du Laplacien en espace uniquement.

Dans la section suivante, les résultats de cette section seront appliquées aux restrictions des fonctions U^k sur les domaines \widehat{B}_i , où U^k sont les coefficients du développement (3.2.8-(ii)). Dans la suite de cette section, nous allons fixer $1 \leq i \leq N$.

Nous introduisons de nouveau les bases de fonctions propres du Laplacien 1D (en $\hat{\nu}_i$) adaptées aux conditions de Neumann en $\hat{\nu}_i = \pm \frac{\beta_i}{2}$: il s'agit de la base $w_{i,p}$ donnée par

$$w_{i,p}(\hat{\nu}_i) = \frac{1}{\sqrt{\beta_i}} w_p \left(\frac{\hat{\nu}_i}{\beta_i} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.2.16)$$

où w_p est la famille donnée par (2.2.24). Il existe alors des fonctions 1D (en espace) $U_{i,p}^k$ telles que

$$U_i^k(t, \hat{s}_i, \hat{\nu}_i) = \sum_{p \in \mathbb{N}} U_{i,p}^k(t, \hat{s}_i) w_{i,p}(\hat{\nu}_i) \quad \text{avec} \quad U_{i,p}^k(t, \hat{s}_i) = \int_{-1}^0 U_i^k(t, \hat{s}_i, \hat{\nu}_i) w_{i,p}(\hat{\nu}_i) d\hat{\nu}_i \quad (3.2.17)$$

Si nous substituons formellement (3.2.17) dans (3.2.15), nous avons

$$\forall k \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^2 U_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i^2} - \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right)^2 U_{i,p}^k = 0 \quad (3.2.18-(i))$$

$$\forall k \geq 2, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^2 U_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i^2} - \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right)^2 U_{i,p}^k = \frac{\partial^2 U_{i,p}^{k-2}}{\partial t^2} \quad (3.2.18-(ii))$$

Nous faisons de nouveau les changements d'inconnues

$$U_{i,p}^k(t, \hat{s}_i, \hat{\nu}_i) = \exp(p\pi\beta_i^{-1}\hat{s}_i) V_{i,p}^k(t, \hat{s}_i, \hat{\nu}_i) \quad \text{et} \quad U_{i,p}^k(t, \hat{s}_i, \hat{\nu}_i) = \exp(-p\pi\beta_i^{-1}\hat{s}_i) W_{i,p}^k(t, \hat{s}_i, \hat{\nu}_i)$$

nous obtenons les systèmes d'équations suivantes (avec la convention de la remarque 2.2.6) :

$$\frac{\partial^2 V_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i^2} + 2 \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right) \frac{\partial V_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i} - \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right)^2 V_{i,p}^k = \frac{\partial^2 V_{i,p}^{k-2}}{\partial t^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (3.2.19-(i))$$

$$\frac{\partial^2 W_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i^2} - 2 \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right) \frac{\partial W_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i} - \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right)^2 W_{i,p}^k = \frac{\partial^2 W_{i,p}^{k-2}}{\partial t^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (3.2.19-(ii))$$

L'idée ici est de chercher des solutions de (3.2.20) sous la forme de produit d'une fonction de \hat{s}_i fois une fonction de t . En notant de nouveau V et W la fonction de \hat{s}_i qui intervient, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 V_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i^2} + 2 \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right) \frac{\partial V_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i} - \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right)^2 V_{i,p}^k = V_{i,p}^{k-2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (3.2.20-(i))$$

$$\frac{\partial^2 W_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i^2} - 2 \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right) \frac{\partial W_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i} - \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right)^2 W_{i,p}^k = W_{i,p}^{k-2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (3.2.20-(ii))$$

qui n'est autre que le système (2.2.27), au signe du second membre près. Nous allons de nouveau chercher des solutions polynômiales que nous appellerons $c_{i,p}^k$ et $d_{i,p}^k$, qui seront définies par récurrence sur k et qui seront indistinctement nulles pour k impair.

- De nouveau, la valeur $p = 0$ joue un rôle particulier, puisque les équations (3.2.20-(i)) et (3.2.20-(ii)) sont les mêmes. Pour $k = 0, 1$, nous avons

$$c_{i,0}^0(\hat{s}_i) = \hat{s}_i, \quad c_{i,0}^1(\hat{s}_i) = 0, \quad d_{i,0}^0(\hat{s}_i) = 1, \quad d_{i,0}^1(\hat{s}_i) = 0 \quad (3.2.21)$$

et pour $k \geq 2$, nous avons

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 c_{i,0}^k}{\partial \hat{s}_i^2} = c_{i,0}^{k-2}, \quad c_{i,0}^k(0) = \frac{\partial c_{i,0}^k}{\partial \hat{s}_i}(0) = 0, \\ \frac{\partial^2 d_{i,0}^k}{\partial \hat{s}_i^2} = d_{i,0}^{k-2}, \quad d_{i,0}^k(0) = \frac{\partial d_{i,0}^k}{\partial \hat{s}_i}(0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.2.22)$$

Il est facile de voir, pour k pair, que les solutions de (3.2.22) sont (nous retrouvons les monômes du développement de Taylor de la fonction $\hat{s}_i \mapsto \exp(\hat{s}_i)$) :

$$c_{i,0}^{2m} = \frac{(\hat{s}_i)^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad d_{i,0}^{2m} = \frac{(\hat{s}_i)^{2m}}{(2m)!}, \quad (3.2.23)$$

- Pour $p \geq 1$, nous partons de

$$c_{i,p}^0(\hat{s}_i) = 1, \quad c_{i,p}^1(\hat{s}_i) = 0, \quad d_{i,p}^0(\hat{s}_i) = 1, \quad d_{i,p}^1(\hat{s}_i) = 0, \quad p \geq 1 \quad (3.2.24)$$

Puis, pour $k \geq 2$, $(c_{i,p}^k, d_{i,p}^k)$ est définie comme étant la solution polynômiale de

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 c_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i^2} + 2 \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right) \frac{\partial c_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i} = c_{i,p}^{k-2}, \quad c_{i,p}^k(0) = 0, \\ \frac{\partial^2 d_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i^2} - 2 \left(\frac{p\pi}{\beta_i} \right) \frac{\partial d_{i,p}^k}{\partial \hat{s}_i} = d_{i,p}^{k-2}, \quad d_{i,p}^k(0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.2.25)$$

Notons la différence entre les deux lignes de (3.2.25)

Proposition 3.2.3. *Soit $(c_{i,p}^k, d_{i,p}^k)_{p \geq 1, k \in \mathbb{N}}$ une famille polynômiale de fonctions satisfaisant (3.2.24, 3.2.25); alors*

1. Cette famille est bien définie et est unique,
2. $c_{i,p}^{2m}$ et $d_{i,p}^{2m}$ sont de degré m ,
3. $c_{i,p}^{2m+1}$ et $d_{i,p}^{2m+1}$ sont nuls,
4. nous avons les relations suivantes reliant $c_{i,p}^k$ et $d_{i,p}^k$:

$$d_{i,p}^k(\hat{s}_i) = c_{i,p}^k(-\hat{s}_i) \quad (3.2.26)$$

5. nous avons les relations suivantes reliant $d_{i,p}^k$ et $d_{i,1}^k$:

$$d_{i,p}^k(\hat{s}_i) = p^{-k} d_{i,1}^k(p\hat{s}_i) \quad (3.2.27)$$

Démonstration. La preuve de cette proposition est identique à la preuve de la proposition 2.2.7. \square

Une fois ces familles de polynômes, nous construisons les familles de fonctions $\mathbf{c}_{i,p}^k, \mathbf{d}_{i,p}^k$ de \widehat{B}_i dans \mathbb{R} de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{c}_{i,p}^k(\hat{s}_i, \hat{\nu}_i) = \exp(p\pi\beta_i^{-1}\hat{s}_i) c_{i,p}^k(\hat{s}_i) w_p(\hat{\nu}_i), \\ \mathbf{d}_{i,p}^k(\hat{s}_i, \hat{\nu}_i) = \exp(-p\pi\beta_i^{-1}\hat{s}_i) d_{i,p}^k(\hat{s}_i) w_p(\hat{\nu}_i), \end{array} \right. \quad (3.2.28)$$

qui constituent des familles particulières de solutions des équations de Laplace emboîtées suivantes

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \Delta \mathbf{c}_{i,p}^k = \mathbf{c}_{i,p}^{k-2}, \quad \Delta \mathbf{d}_{i,p}^k = \mathbf{d}_{i,p}^{k-2}, \quad \text{dans } \widehat{B}_i \quad (3.2.29)$$

avec des conditions de Neumann homogènes en $\hat{\nu}_i = \pm \frac{\beta_i}{2}$.

Remarque 3.2.4. Nous pouvons voir que pour $p \geq 1$, la famille des fonctions $\mathbf{c}_{i,p}$ est exponentiellement croissante que $\hat{s}_i \rightarrow \infty$, alors que la famille des fonctions $\mathbf{d}_{i,p}$ est exponentiellement décroissante que $\hat{s}_i \rightarrow \infty$. Cette propriété sera utilisée lors de l'écriture des conditions de raccord.

Le lemme suivant explique alors que la famille de fonctions introduite ci-dessus est suffisante pour décrire le comportement des fonctions U_{\pm}^k :

Lemme 3.2.5 (Lemme fondamental de développement des U_{\pm}^k). *Soit $\{U_i^k \in H_{loc}^1(\widehat{B}_i), k \in \mathbb{N}\}$ une famille de fonctions satisfaisant (3.2.15), il existe alors deux suites de fonctions $(\gamma_{i,p}^k)_{(p,k) \in \mathbb{N}^2}$ et $(\delta_{i,p}^k)_{(p,k) \in \mathbb{N}^2}$ ne dépendant que de t telles que*

$$U_i^k(t, \hat{s}_i, \hat{\nu}_i) = \sum_{m=0}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\frac{\partial^m \gamma_{i,p}^{k-m}}{\partial t^m}(t) \mathbf{c}_{i,p}^m(\hat{s}_i, \hat{\nu}_i) + \frac{\partial^m \delta_{i,p}^{k-m}}{\partial t^m}(t) \mathbf{d}_{i,p}^m(\hat{s}_i, \hat{\nu}_i) \right) \quad (3.2.30)$$

Démonstration. La preuve de ce lemme est similaire à la preuve du lemme 2.2.9 □

Nous pouvons formaliser les résultats du lemme 3.2.5 en introduisant les espaces vectoriels

$$\mathcal{V}^k(\widehat{B}_i) = \text{vect} \{(\mathbf{c}_{i,p}^m, \mathbf{d}_{i,p}^m), p \in \mathbb{N}, m \leq k\}, \quad \mathcal{V}(\widehat{B}_i) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}^k(\widehat{B}_i) \quad (3.2.31)$$

et les formes linéaires $\mathcal{U}_i \in \mathcal{V}(\widehat{B}_i) \rightarrow \mathcal{N}_{i,p}^m(\mathcal{U}_i) \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{U}_i \in \mathcal{V}(\widehat{B}_i) \rightarrow \mathcal{D}_{i,p}^m(\mathcal{U}_i) \in \mathbb{C}$ telles que

$$\forall \mathcal{U}_i \in \mathcal{V}^k(\widehat{B}_i), \quad \mathcal{U}_i = \sum_{m=0}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{N}_{i,p}^{k-m}(\mathcal{U}_i) \mathbf{c}_{i,p}^m + \mathcal{D}_{i,p}^{k-m}(\mathcal{U}_i) \mathbf{d}_{i,p}^m \right) \quad (3.2.32)$$

Dans ce qui va suivre, la valeur $m = 0$ jouera un rôle particulier et c'est pourquoi nous notons

$$\forall \mathcal{U}_i \in \mathcal{V}(\widehat{B}_i), \quad \mathcal{N}_{i,p}(\mathcal{U}_i) := \mathcal{N}_{i,p}^0(\mathcal{U}_i), \quad \mathcal{D}_{i,p}(\mathcal{U}_i) := \mathcal{D}_{i,p}^0(\mathcal{U}_i) \quad (3.2.33)$$

Avec ces notations, le lemme 3.2.5 peut être réinterprété de la manière suivante :

Corollaire 3.2.6. *Soit $\{U_i^k \in H_{loc}^1(\widehat{B}_i), k \in \mathbb{N}\}$ une famille de fonctions satisfaisant (3.2.15), alors*

$$U_i^k \in \mathcal{V}^k(\widehat{B}_i) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_{i,p}^m(U_i^k) = \frac{\partial^m \mathcal{N}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m}, \quad \mathcal{D}_{i,p}^m(U_i^k) = \frac{\partial^m \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m} \quad (3.2.34)$$

et nous avons comme conséquence

$$U_i^k = \sum_{m=0}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\frac{\partial^m \mathcal{N}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m} \mathbf{c}_{i,p}^m + \frac{\partial^m \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m} \mathbf{d}_{i,p}^m \right) \quad (3.2.35)$$

3.2.3.2 Dérivation des conditions de raccord

Pour dériver les conditions de raccord, nous écrivons simplement que les deux développements (3.2.8-(i)), (3.2.8-(ii)) doivent coïncider (au moins formellement) dans les zones de recouvrement (3.2.3), i.e. en notant U_i^k la restriction de U^k à la fente semi-infinie \widehat{B}_i :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k U_i^k(\hat{s}_i/\varepsilon, \hat{\nu}_i/\varepsilon) + o(\varepsilon^\infty) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k u_i^k(\hat{s}_i, \hat{\nu}_i/\varepsilon) + o(\varepsilon^\infty), \quad \text{dans } \mathcal{O}_i(\varepsilon) \quad (3.2.36)$$

Nous notons respectivement \mathcal{L} et \mathcal{R} le membre de gauche et le membre de droite de (3.2.36). Nous allons commencer par \mathcal{R} qui est le plus simple à écrire : puisque dans la zone de recouvrement, $\hat{s}_i < 2\varphi(\varepsilon)$ et $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (première des deux conditions limites sur φ données par (2.2.8)), nous allons utiliser un développement de Taylor en $\hat{s} = 0$ pour chaque fonction u_i^k :

$$\mathcal{R} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^k \hat{s}_i^m \frac{1}{m!} \frac{\partial^m u_i^k}{\partial \hat{s}_i^m}(t, 0) + o(\varepsilon^\infty) \quad (3.2.37)$$

Pour \mathcal{L} , nous utilisons les développements (3.2.35) du corollaire 3.2.6, et nous obtenons, en utilisant le

fait que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^k = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq m}$ au moins formellement :

$$\mathcal{L} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq m} \varepsilon^k \left(\frac{\partial^m \mathcal{N}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m}(t) \mathbf{c}_{i,p}^m(\hat{s}_i/\varepsilon, \hat{\nu}_i/\varepsilon) + \frac{\partial^m \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m}(t) \mathbf{d}_{i,p}^m(\hat{s}_i/\varepsilon, \hat{\nu}_i/\varepsilon) \right) + o(\varepsilon^\infty)$$

Nous faisons maintenant les changements d'indices $k \rightarrow k + 2m' + 1$ pour la première somme et $k \rightarrow k + 2m'$ pour la seconde somme, et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \sum_{m' \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq -1} \varepsilon^k \frac{\partial^{2m'} \mathcal{N}_i(U_i^{k+1})}{\partial t^{2m'+1}}(t) \frac{\hat{s}_i^{2m'+1}}{(2m')!} + \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \sum_{m' \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_i(U_i^k)}{\partial t^{2m'}}(t) \frac{\hat{s}_i^{2m'}}{(2m')!} \\ &+ \sum_{p \geq 1} \sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq m} \varepsilon^k \frac{\partial^m \mathcal{N}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m}(t) \mathbf{c}_{i,p}^m(\hat{s}_i/\varepsilon, \hat{\nu}_i/\varepsilon) + o(\varepsilon^\infty) \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Finalement, l'identification formelle des deux expressions (3.2.37) et (3.2.38) dans les zones de recouvrement $\mathcal{O}_i(\varepsilon)$ comme étant des fonctions de ε , \hat{s} et $\hat{\nu}$ nous donne les conditions de raccord.

Tout d'abord, pour $p \geq 1$, après avoir multiplié (3.2.37) et (3.2.38) par $w_{i,p}(\hat{\nu}_i)$ et intégré suivant $\hat{\nu}_i$, nous avons

$$\sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq m} (\varepsilon \omega)^k \frac{\partial^m \mathcal{N}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m}(t) c_{i,p}^m(\hat{s}_i/\varepsilon, \hat{\nu}_i/\varepsilon) \exp(p\pi\beta_i^{-1}\hat{s}_i/\varepsilon) = 0$$

La proposition 3.2.3 implique que les fonctions $c_{i,p}^{2m'}$ sont linéairement indépendantes et nous en déduisons que $\frac{\partial^{2m'} \mathcal{N}_{i,p}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) = 0$ pour tout $m' \geq 0$ et pour tout $k \geq 0$, i.e. :

$$\mathcal{N}_{i,p}(U_i^k)(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad p \geq 1, \quad k \geq 0 \quad (3.2.39)$$

qui exprime l'absence de termes exponentiellement croissants. Nous pouvons voir que (3.2.39) se réécrit sous la forme suivante

$$U^k \text{ a une croissance au plus polynômiale à l'infini dans } \widehat{\mathcal{J}}^\infty \quad (3.2.40)$$

Ensuite, il revient d'identifier les termes en puissance de \hat{s}_i et de ε des deux développements. L'identification de ces termes en puissance de $\varepsilon^k \hat{s}_i^m$, en distinguant les valeurs paires et impaires de m nous donne

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{N}_i(U_i^{k+1})}{\partial t^{2m'+1}}(t) &= \frac{\partial^{2m'+1} u_i^k}{\partial \hat{s}_i^{2m'+1}}(t, 0) \\ \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_i(U_i^k)}{\partial t^{2m'}}(t) &= \frac{\partial^{2m'} u_i^k}{\partial \hat{s}_i^{2m'}}(t, 0) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que chaque fonction u_i^k est solution d'une équation d'ondes 1D, nous avons

$$\frac{\partial^{2m'} u_i^k}{\partial t^{2m'}}(t, 0) = \frac{\partial^{2m'} u_i^k}{\partial \hat{s}_i^{2m'}}(t, 0)$$

Nous obtenons alors les conditions de raccord de "Dirichlet" et de "Neumann" qui sont

$$\begin{cases} (\mathcal{D}) & u_i^k(t, 0) = \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \mathcal{D}_i(U_i^k)(t), \quad k \in \mathbb{N} \\ (\mathcal{N}) & \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial \hat{s}}(t, 0) = \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \mathcal{N}_i(U_i^k)(t), \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.2.41)$$

3.3 Justification des développements formels et estimations d'erreurs

Dans cette section, notre but est de prouver que les fonctions (u_i^k, U^k) sont définies de manière unique, et qu'il existe une fonction approchée construite à partir de ces développements qui diffère de la solution exacte d'une erreur étant une puissance de ε qui croît avec l'ordre de l'approximation que nous considérons.

3.3.1 Existence et unicité des développements formels

Notre but est de montrer que les équations (3.2.10, 3.2.11, 3.2.12, 3.2.13) associées aux conditions de raccord (3.2.41) et de croissance (3.2.39) définissent une unique famille

$$\{(u_1^k, \dots, u_N^k, U^k), \quad k \in \mathbb{N}\}$$

Pour atteindre notre but, nous allons d'abord formuler un problème équivalent au problème (3.2.12, 3.2.13) mais posé sur la jonction canonique $\hat{\mathcal{J}}$. Cette formulation équivalente sera de plus utile pour les simulations numériques, qui seront détaillées dans le chapitre 4. Nous montrerons ensuite l'existence et l'unicité des termes du développement.

3.3.1.1 Restriction à un domaine borné pour les fonctions U^k

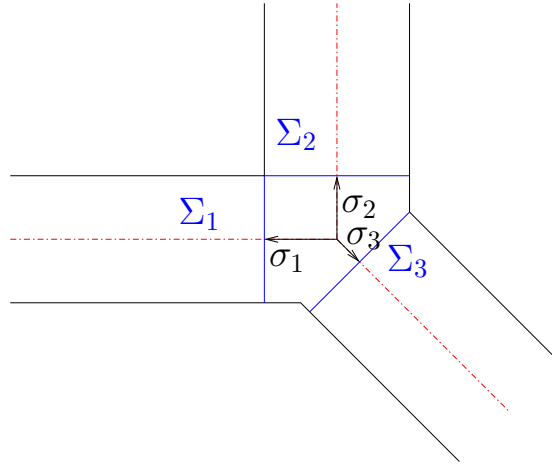
Notre but ici est de trouver une famille de problèmes qui sont emboîtés et posés sur $\hat{\mathcal{J}}$ dont la solution est la restriction des fonctions U^k au domaine $\hat{\mathcal{J}}$. Pour atteindre ce but, nous allons utiliser le développement modal de chaque fonction U^k , donné par (3.2.35), afin d'écrire des opérateurs Dirichlet-to-Neumann sur les interfaces Σ_i définies par (voir figure 3.7) :

$$\Sigma_i = \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \partial \hat{\mathcal{J}}, \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}^i = \sigma_i \text{ and } |\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}^i| \leq \frac{\beta_i}{2} \right\} \quad (3.3.1)$$

Remarque 3.3.1. Contrairement à ce qui se passe dans le chapitre précédent, les interfaces ne sont pas paramétrées par $\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}^i = 0$. Ceci est dû au fait que le domaine Ω^ε est obtenu par extension symétrique du domaine limite 1D, alors que dans le chapitre précédent, l'extension n'était que d'un seul côté.

En utilisant (3.2.35) et (3.2.39), nous pouvons écrire, en séparant les termes $m = 0$ (qui font intervenir U^k) des autres termes :

$$\left| \begin{aligned} U_i^k(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \mathcal{N}_{i,0}(U_i^k)(t) \mathbf{c}_{i,0}^0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^k)(t) \mathbf{d}_{i,p}^0(\hat{\mathbf{x}}) \\ &+ \sum_{m=1}^k \frac{\partial^m \mathcal{N}_{i,0}(U_i^{k-m})}{\partial t^m}(t) \mathbf{c}_{i,0}^m(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{m=1}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\partial^m \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m}(t) \mathbf{d}_{i,p}^m(\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \right. \quad (3.3.2)$$

FIGURE 3.7 – Rappel de la jonction normalisée \widehat{J}

Nous prenons la trace de (3.3.2) sur Σ_i , et nous obtenons, en utilisant (3.2.28) :

$$\begin{aligned}
 U_i^k(t, \sigma_i, \hat{\nu}_i) &= \mathcal{N}_{i,0}(U_i^k)(t) \frac{\sigma_i}{\sqrt{\beta_i}} + \mathcal{D}_{i,0}(U_i^k)(t) \frac{1}{\sqrt{\beta_i}} \\
 &+ \sum_{p \geq 1} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^k)(t) \exp\left(-\frac{p\pi\sigma_i}{\beta_i}\right) w_{i,p}(\hat{\nu}_i) \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{N}_{i,0}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \frac{\sigma_i^{2m'+1}}{(2m'+1)!} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_{i,0}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \frac{\sigma_i^{2m'}}{(2m')!} \\
 &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \sum_{p \geq 1} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \exp\left(-\frac{p\pi\sigma_i}{\beta_i}\right) d_{i,p}^{2m'}(\sigma_i) w_{i,p}(\hat{\nu}_i)
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Puisque la famille $(w_{i,p})_{p \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $L^2\left(\left[-\frac{\beta_i}{2}, \frac{\beta_i}{2}\right]\right)$ (donc de $L^2(\Sigma_i)$), nous pouvons voir que, pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_i} U_i^k(t, \sigma_i, \hat{\nu}_i) w_{i,p}(\hat{\nu}_i) d\hat{\nu}_i &= \mathcal{D}_{i,p}(U_i^k)(t) \exp\left(-\frac{p\pi\sigma_i}{\beta_i}\right) \\
 &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \exp\left(-\frac{p\pi\sigma_i}{\beta_i}\right) d_{i,p}^{2m'}(\sigma_i)
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Nous pouvons également calculer la trace de la dérivée normale de U^k sur Σ_i (donc la dérivée par

rapport à \hat{s}_i) à partir de (3.3.2), pour obtenir

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial U_i^k}{\partial \hat{s}_i}(t, \sigma_i, \hat{v}_i) &= \mathcal{N}_{i,0}(U_i^k)(t) \frac{1}{\sqrt{\beta_i}} \\
 &- \sum_{p \geq 1} \frac{p\pi}{\beta_i} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^k)(t) \exp\left(-\frac{p\pi\sigma_i}{\beta_i}\right) w_{i,p}(\hat{v}_i) \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{N}_{i,0}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \frac{\sigma_i^{2m'}}{(2m')!} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_{i,0}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \frac{\sigma_i^{2m'-1}}{(2m'-1)!} \\
 &- \frac{p\pi}{\beta_i} \sum_{m'=1}^{k/2} \sum_{p \geq 1} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \exp\left(-\frac{p\pi\sigma_i}{\beta_i}\right) d_{i,p}^{2m'}(\sigma_i) w_{i,p}(\hat{v}_i) \\
 &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \sum_{p \geq 1} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \exp\left(-\frac{p\pi\sigma_i}{\beta_i}\right) \frac{\partial d_{i,p}^{2m'}}{\partial \hat{s}_i}(\sigma_i) w_{i,p}(\hat{v}_i)
 \end{aligned} \right\} \tag{3.3.5}
 \end{aligned}$$

Le point à remarquer est que, en utilisant (3.3.4), la somme des seconde et cinquième lignes de (3.3.5) devient

$$- \sum_{p \geq 1} \frac{p\pi}{\beta_i} \int_{\Sigma_i} U_i^k(t, \sigma_i, \hat{v}_i) w_{i,p}(\hat{v}_i) d\hat{v}_i \tag{3.3.6}$$

Il est alors naturel d'introduire l'opérateur Dirichlet-to-Neumann non-local $T_i : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_i) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_i)$ défini de la même manière que l'opérateur Dirichlet-to-Neumann T du chapitre 2 - une définition plus précise de cet opérateur est donné dans l'annexe A.2.1. En utilisant également (3.2.41-(\mathcal{N})), nous pouvons réécrire (3.3.6) sous la forme

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial U_i^k}{\partial \hat{s}_i}(t, \cdot) + T_i U_i^k(t, \cdot) &= \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) \\
 &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'-1}}{\partial t^{2m'} \partial \hat{s}_i}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'}}{(2m')!} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_{i,0}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \frac{\sigma_i^{2m'-1}}{(2m'-1)!} \\
 &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \sum_{p \geq 1} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \exp\left(-\frac{p\pi\sigma_i}{\beta_i}\right) \frac{\partial d_{i,p}^{2m'}}{\partial \hat{s}_i}(\sigma_i) w_{i,p}(\hat{v}_i)
 \end{aligned} \right\} \tag{3.3.7}$$

Finalement, nous avons un problème équivalent au problème (3.2.10, 3.2.11, 3.2.12, 3.2.13, 3.2.41) en remplaçant (3.2.41-(\mathcal{N})) par la condition (3.3.7). Le théorème suivant donne un cadre plus précis (en notant $\mathcal{C}^{1,2}(V) = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, L^2(V)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, H^1(V))$).

Théorème 3.3.2. *Soit $\{(u_1^k, \dots, u_N^k, U^k) \in \mathcal{C}^{1,2}(\widehat{\Omega}_1) \times \dots \times \mathcal{C}^{1,2}(\widehat{\Omega}_N) \times \mathcal{C}_{loc}^{1,2}(\widehat{\mathcal{J}}^\infty)\}$ solution de (3.2.10, 3.2.11, 3.2.12, 3.2.13) avec les conditions de raccord (3.2.41) et de croissance (3.2.39). Alors*

$$\left\{ (u_1^k, \dots, u_N^k, U^k) \in \mathcal{C}^{1,2}(\widehat{\Omega}_1) \times \dots \times \mathcal{C}^{1,2}(\widehat{\Omega}_N) \times \mathcal{C}^{1,2}(\widehat{\mathcal{J}}) \right\}$$

est solution de (3.2.10, 3.2.11), (3.2.12, 3.2.13) $_{\hat{J}}$, (3.2.41-(\mathcal{D})) et (3.3.7).

Inversement, si $\{(u_1^k, \dots, u_N^k, U^k) \in \mathcal{C}^{1,2}(\hat{\Omega}_1) \times \dots \times \mathcal{C}^{1,2}(\hat{\Omega}_N) \times \mathcal{C}^{1,2}(\hat{J})\}$ est solution de (3.2.10, 3.2.11), (3.2.12, 3.2.13) $_{\hat{J}}$, (3.2.41-(\mathcal{D})) et (3.3.7), alors en étendant U^k à chaque domaine \hat{B}_i via

$$\left| \begin{aligned} U^k(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \sqrt{\beta_i} \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) \mathbf{c}_{i,0}^0(\hat{\mathbf{x}}) && + \sum_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^k)(t) \mathbf{d}_{i,p}^0(\hat{\mathbf{x}}) \\ &+ \sqrt{\beta_i} \sum_{m=1}^k \frac{\partial^{m+1} u_i^{k-m-1}}{\partial t^m \partial \hat{s}_i}(t, 0) \mathbf{c}_{i,0}^m(\hat{\mathbf{x}}) && + \sum_{m=1}^k \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\partial^m \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-m})}{\partial t^m}(t) \mathbf{d}_{i,p}^m(\hat{\mathbf{x}}) \quad , \end{aligned} \right.$$

alors

$$\{(u_1^k, \dots, u_N^k, U^k) \in \mathcal{C}^{1,2}(\hat{\Omega}_1) \times \dots \times \mathcal{C}^{1,2}(\hat{\Omega}_N) \times \mathcal{C}_{loc}^{1,2}(\hat{J}^\infty)\}$$

est solution de (3.2.10, 3.2.11, 3.2.12, 3.2.13, 3.2.41) et (3.2.39).

Démonstration. La preuve du théorème 3.3.2 est similaire à la preuve du théorème 2.3.1. \square

3.3.1.2 Lemmes auxiliaires

L'existence et l'unicité vont être démontrées par récurrence sur k . D'après le théorème 3.3.2, il suffit de considérer le problème (3.2.10, 3.2.11), (3.2.12, 3.2.13) $_{\hat{J}}$, (3.2.41-(\mathcal{D})) et (3.3.7). Afin de pouvoir identifier clairement le processus de récurrence, il est utile de reformuler ce problème d'une manière plus découplée (nous sous-entendons entre u_i^k et U^k , pour une valeur de k donnée), qui sera également utile d'un point de vue numérique.

Afin de pouvoir découpler ces problèmes, l'idée est de d'abord considérer (3.3.7) comme une condition de bord pour U^k , afin de formuler un problème de transmission pour les fonctions u_{\pm}^k . C'est pourquoi nous allons utiliser les deux lemmes techniques suivants :

Lemme 3.3.3. Soit $\Phi \in L^2(\hat{J})$ et $g_i \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_i)$. Il existe une unique fonction $U \in H^1(\hat{J})$ à une constante additive près telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U = \Phi, \quad \text{dans } \hat{J} \\ \frac{\partial U}{\partial n} + T_i U = g_i \quad \text{sur } \Sigma_i \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \hat{J} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \Sigma_i \right) \end{array} \right. \quad (3.3.8)$$

si et seulement si la condition de compatibilité suivante est satisfaite

$$\sum_{i=1}^N \langle g_i, 1 \rangle_{\Sigma_i} = \int_{\hat{J}} \Phi \quad (3.3.9)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_i}$ est le crochet de dualité $(H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_i), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_i))$.

Démonstration. La preuve d'existence et d'unicité à une constante près se fait en utilisant le théorème de Lax-Milgram, de la même manière que pour la preuve du lemme 2.3.2. \square

Remarque 3.3.4. La question de savoir si nous avons une plus grande régularité sur U peut être posée. Si Φ est une fonction k fois dérivable par rapport au temps, il est facile de démontrer que la solution U du problème (3.3.8, 3.3.9) est aussi k fois dérivable par rapport au temps. Cependant, le domaine \hat{J} faisant généralement intervenir des coins rentrants, nous ne pouvons pas avoir la régularité H^2 en espace de la fonction U (ce résultat peut être trouvé par exemple dans les travaux de Monique Dauge [Dau88]).

Corollaire 3.3.5. Soit \mathcal{W}_i , pour $1 \leq i \leq N-1$, l'unique solution à moyenne nulle du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{W}_i = 0 \quad \text{dans } \hat{J} \\ \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial n} + T_i \mathcal{W}_i = \frac{1}{\beta_i} \quad \text{sur } \Sigma_i \\ \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial n} + T_{i+1} \mathcal{W}_i = -\frac{1}{\beta_{i+1}} \quad \text{sur } \Sigma_{i+1} \\ \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial n} + T_j \mathcal{W}_i = 0, \quad \text{sur } \Sigma_j, \quad j \neq i \text{ et } j \neq i+1 \\ \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \hat{J} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \Sigma_i \right) \end{array} \right. \quad (3.3.10)$$

et soit U une solution du problème (3.3.8). Alors

$$\int_{\hat{J}} \nabla U \nabla \mathcal{W}_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Sigma_j} \mathcal{W}_i T_j U = \frac{1}{\beta_i} \int_{\Sigma_i} U - \frac{1}{\beta_{i+1}} \int_{\Sigma_{i+1}} U = \sum_{j=1}^N \int_{\Sigma_j} g_j \mathcal{W}_i - \int_{\hat{J}} \Phi \mathcal{W}_i \quad (3.3.11)$$

Démonstration. La preuve de ce corollaire (y compris la relation (3.3.11)) est similaire à la preuve du corollaire 2.3.3 \square

Lemme 3.3.6. Nous nous plaçons dans le cas $L_i = +\infty$, pour tout $1 \leq i \leq N$. Étant donnée une famille de sauts de Dirichlet $(\mathbf{j}_i)_{1 \leq i \leq N-1} \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_+^*)$ tel que $\mathbf{j}_i(0) = 0$, étant donnée une moyenne de Neumann $\mathbf{a} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+^*)$, et étant donnée une famille de données de Cauchy $(\mathbf{f}_i)_{1 \leq i \leq N} \in H^1(]0, L_i[)$, $(\mathbf{g}_i)_{1 \leq i \leq N} \in L^2(]0, L_i[)$, il existe une unique famille solution $(u_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{C}^{1,2}(]0, L_i[)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial \hat{s}_i^2} = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times]0, L_i[, \\ u_i(0, \cdot) = \mathbf{f}_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(0, \cdot) = \mathbf{g}_i, \\ \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{\partial u_i}{\partial \hat{s}_i}(\cdot, 0) = \mathbf{a} \\ u_{i+1}(\cdot, 0) - u_i(\cdot, 0) = \mathbf{j}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{array} \right. \quad (3.3.12)$$

De plus, nous avons continuité de la solution par rapport aux données initiales.

Démonstration. L'idée est de décomposer ce problème en trois problèmes distincts, par linéarité :

- un problème classique dont nous noterons la solution $u_i^{\mathbf{f}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_i^{\mathbf{f}}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i^{\mathbf{f}}}{\partial \hat{s}_i^2} = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times]0, L_i[, \\ u_i^{\mathbf{f}}(0, \cdot) = \mathbf{f}_i, \quad \frac{\partial u_i^{\mathbf{f}}}{\partial t}(0, \cdot) = \mathbf{g}_i, \\ \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{\partial u_i^{\mathbf{f}}}{\partial \hat{s}_i}(\cdot, 0) = 0 \\ u_{i+1}^{\mathbf{f}}(\cdot, 0) - u_i^{\mathbf{f}}(\cdot, 0) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{array} \right. \quad (3.3.13)$$

Toujours par linéarité, nous pouvons supposer que le support des fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} est contenu dans la première fente. Dans ce cas, en supposant que \mathbf{f}_1 et \mathbf{g}_1 ne comprennent pas 0 dans leur support, nous avons, pour t assez petit, en utilisant la formule de d'Alembert :

$$u_1^{\mathbf{f}}(t, \hat{s}_1) = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_1(\hat{s}_1 - t) + \mathbf{f}_1(\hat{s}_1 + t)) + \frac{1}{2} \int_{\hat{s}_1 - t}^{\hat{s}_1 + t} \mathbf{g}_1(\hat{s}') d\hat{s}'$$

et de même, $u_i^{\mathbf{f}}(t, \hat{s}_i) = 0$ pour $t < \hat{s}_i$.

Lorsque t n'est plus petit (i.e. dans le cas où la solution décrite ci-dessus ne s'annule plus en $\hat{s}_1 = 0$), nous avons, pour $t > \hat{s}_i$:

$$\begin{aligned} u_1^{\mathbf{f}}(t, \hat{s}_1) &= \frac{1}{2} \mathbf{f}_1(\hat{s}_1 + t) + \frac{R_1}{2} \mathbf{f}_1(t - \hat{s}_1) + \frac{1}{2} \int_0^{\hat{s}_1 + t} \mathbf{g}_1(\hat{s}') d\hat{s}' + \frac{R_1}{2} \int_0^{t - \hat{s}_1} \mathbf{g}_1(\hat{s}') d\hat{s}' \\ u_i^{\mathbf{f}}(t, \hat{s}_i) &= \frac{T_1}{2} \mathbf{f}_1(t - \hat{s}_i) + \frac{T_1}{2} \int_0^{t - \hat{s}_i} \mathbf{g}_1(\hat{s}') d\hat{s}', \quad i \neq 1 \end{aligned}$$

où les coefficients R_1 et T_1 sont donnés par les formules suivantes

$$R_1 = \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = \frac{\sum_{j \neq 1} \beta_j}{\beta_1} \quad (3.3.14)$$

- un problème dont nous noterons la solution $u_i^{\mathbf{j}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_i^{\mathbf{j}}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i^{\mathbf{j}}}{\partial \hat{s}_i^2} = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times]0, L_i[, \\ u_i^{\mathbf{j}}(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial u_i^{\mathbf{j}}}{\partial t}(0, \cdot) = 0, \\ u_{i+1}^{\mathbf{j}}(\cdot, 0) - u_i^{\mathbf{j}}(\cdot, 0) = \mathbf{j}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ \frac{\partial u_{i+1}^{\mathbf{j}}}{\partial t}(\cdot, 0) + \frac{\partial u_{i+1}^{\mathbf{j}}}{\partial \hat{s}_i}(\cdot, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.3.15)$$

Nous pouvons remarquer que ce problème est bien posé et admet comme solution (en étendant $\mathbf{j}_i(\tau)$ à 0 pour τ négatif) :

$$u_i^{\mathbf{j}}(t, \hat{s}_i) = \sum_{j < i} \mathbf{j}_j(t - \hat{s}_i) \quad (3.3.16)$$

Nous pouvons également remarquer que

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \beta_i \mathbf{j}'_j(t) \quad (3.3.17)$$

- un problème dont nous noterons la solution $u_i^{\mathbf{a}}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u_i^{\mathbf{a}}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i^{\mathbf{a}}}{\partial \hat{s}_i^2} = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times]0, L_i[, \\ u_i^{\mathbf{a}}(0, \cdot) = 0, & \frac{\partial u_i^{\mathbf{a}}}{\partial t}(0, \cdot) = 0, \\ \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{\partial u_i^{\mathbf{a}}}{\partial \hat{s}_i}(\cdot, 0) = \mathbf{a} + \sum_{j=1}^n \sum_{l < j} \beta_j \mathbf{j}_l' & \\ u_{i+1}^{\mathbf{a}}(\cdot, 0) - u_i^{\mathbf{a}}(\cdot, 0) = 0, & 1 \leq i \leq N-1 \end{array} \right. \quad (3.3.18)$$

Ce problème est bien posé : l'unicité se démontre de manière classique (si il existe deux solutions de (3.3.18), alors leur différence est solution d'un problème homogène bien posé, donc est nulle), et l'existence est donnée en calculant explicitement la solution (en étendant également $\mathbf{a}(\tau)$ à 0 pour τ négatif)

$$u_i^{\mathbf{a}}(t, \hat{s}_i) = -\frac{1}{\sum \beta_j} \left(\int_0^{t-\hat{s}_i} \mathbf{a}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n \sum_{l < j} \beta_j \mathbf{j}_l(t - \hat{s}_i) \right) \quad (3.3.19)$$

Finalement, $u_i^{\mathbf{f}} + u_i^{\mathbf{j}} + u_i^{\mathbf{a}}$ est solution du problème initial (3.3.12).

Nous pouvons maintenant estimer la norme des fonctions u_i en estimant la norme de chaque fonction $u_i^{\mathbf{f}}$, $u_i^{\mathbf{j}}$ et $u_i^{\mathbf{a}}$. Pour les termes $u_i^{\mathbf{f}}$, nous utilisons des estimations d'erreur identiques aux estimations d'erreurs obtenues pour la solution de l'équation des ondes posées sur $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour les termes $u_i^{\mathbf{j}}$ et $u_i^{\mathbf{a}}$, nous utilisons les expressions (3.3.16) et (3.3.19) pour obtenir les estimations d'erreur suivantes :

$$\begin{aligned} \left\| u_i^{\mathbf{j}}(t, \cdot) \right\|_{L^2(S_i)} &\leq \sum_{j < i} \beta_j \|\mathbf{j}_j\|_{L^2(]0, t])} \\ \left\| \frac{\partial u_i^{\mathbf{j}}}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(S_i)} &\leq \sum_{j < i} \beta_j \|\mathbf{j}_j\|_{H^1(]0, t])} \\ \left\| \frac{\partial u_i^{\mathbf{j}}}{\partial \hat{s}_i}(t, \cdot) \right\|_{L^2(S_i)} &\leq \sum_{j < i} \beta_j \|\mathbf{j}_j\|_{H^1(]0, t])} \\ \|u_i^{\mathbf{a}}(t, \cdot)\|_{L^2(S_i)} &\leq \frac{1}{\sum \beta_j} \left(\sqrt{t} \|\mathbf{a}\|_{L^2(]0, t])} + \sum_{j=1}^N \sum_{l < j} \beta_l \|\mathbf{j}_l\|_{L^2(]0, t])} \right) \\ \left\| \frac{\partial u_i^{\mathbf{a}}}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(S_i)} &\leq \frac{1}{\sum \beta_j} \left(\|\mathbf{a}\|_{L^2(]0, t])} + \sum_{j=1}^N \sum_{l < j} \beta_l \|\mathbf{j}_l\|_{H^1(]0, t])} \right) \\ \left\| \frac{\partial u_i^{\mathbf{a}}}{\partial \hat{s}_i}(t, \cdot) \right\|_{L^2(S_i)} &\leq \frac{1}{\sum \beta_j} \left(\|\mathbf{a}\|_{L^2(]0, t])} + \sum_{j=1}^N \sum_{l < j} \beta_l \|\mathbf{j}_l\|_{H^1(]0, t])} \right) \end{aligned}$$

Le preuve du lemme est alors établie. \square

Remarque 3.3.7. Ce lemme reste également vrai dans le cas où $L_i \neq +\infty$. Cependant, la preuve est plus complexe à écrire (l'écriture des différentes fonctions faisant alors intervenir le principe des images), et les estimations d'énergie font apparaître explicitement t .

Remarque 3.3.8. Dans le cadre d'une jonction de deux fentes de même épaisseur, nous avons $\beta_1 = \beta_2$, et les coefficients donnés par (3.3.14) deviennent $R_1 = 0$ et $T_1 = 1$. Nous retrouvons alors la formule de d'Alembert, écrite sur chacune des deux fentes semi-infinies.

3.3.1.3 Existence et unicité

D'après (3.2.12, 3.2.13) $_{\hat{J}}$ et (3.3.7), nous pouvons appliquer, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, le lemme 3.3.3 pour $U = U^k(t, \cdot)$, $\Phi = \frac{\partial^2 U^{k-2}}{\partial t^2}(t, \cdot)$ et $g_i = g_i^{k-1}(t, \cdot)$ avec

$$\begin{aligned} g_i^{k-1} &= \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) \\ &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'-1}}{\partial t^{2m'} \partial \hat{s}_i}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'}}{(2m')!} \\ &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'}}{\partial t^{2m'}}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'-1}}{(2m'-1)!} \\ &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \sum_{p \geq 1} \frac{\partial^{2m'} \mathcal{D}_{i,p}(U_i^{k-2m'})}{\partial t^{2m'}}(t) \exp\left(-\frac{p\pi\sigma_i}{\beta_i}\right) \frac{\partial d_{i,p}^{2m'}}{\partial \hat{s}_i}(\sigma_i) w_{i,p} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

La condition de compatibilité (3.3.9) nous donne alors, une fois le changement d'indices $k = k + 1$ effectué :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^k}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) &= \int_{\hat{J}} \frac{\partial^2 U^{k-1}}{\partial t^2}(t, \hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &- \sum_{i=1}^N \beta_i \sum_{m'=1}^{(k+1)/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'}}{\partial t^{2m'} \partial \hat{s}_i}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'}}{(2m')!} \\ &- \sum_{i=1}^N \beta_i \sum_{m'=1}^{(k+1)/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k+1-2m'}}{\partial t^{2m'}}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'-1}}{(2m'-1)!} \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Remarque 3.3.9. Dans la définition 3.1.5, nous avons défini σ_i comme étant la plus *petite* valeur possible pour le découpage. Cependant, rien ne nous empêche de prendre un autre N -uplet $(\sigma'_i)_{1 \leq i \leq N}$, avec $\sigma_i \leq \sigma'_i$, et de considérer la nouvelle jonction \hat{J}' définie par

$$\hat{J}' = \hat{J} \cup \bigcup_{i=1}^N \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 / \sigma_i \leq \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}^i < \sigma'_i \text{ et } |\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}^i| \leq \frac{\beta_i}{2} \right\}$$

En reprenant les calculs de traces, nous avons également

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^k}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) &= \int_{\hat{J}'} \frac{\partial^2 U^{k-1}}{\partial t^2}(t, \hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &- \sum_{i=1}^N \beta_i \sum_{m'=1}^{(k+1)/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'}}{\partial t^{2m'} \partial \hat{s}_i}(t, 0) \frac{(\sigma'_i)^{2m'}}{(2m')!} \\ &- \sum_{i=1}^N \beta_i \sum_{m'=1}^{(k+1)/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k+1-2m'}}{\partial t^{2m'}}(t, 0) \frac{(\sigma'_i)^{2m'-1}}{(2m'-1)!} \end{aligned}$$

Le membre de gauche de cette relation ne dépend pas du choix de σ'_i , donc le membre de droite de cette relation ne doit pas non plus dépendre du choix de σ'_i - la non-dépendance est cachée dans l'écriture modale de U^{k-1} sur le domaine

$$\left\{ \widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 / \sigma_i \leq \widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}^i < \sigma'_i \text{ et } |\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}^i| \leq \frac{\beta_i}{2} \right\}$$

Ensuite, étant donné $1 \leq i \leq N$, l'intégration normalisée de U^k sur le bord Σ_i en utilisant le développement modal (3.3.3) et en utilisant les conditions de raccord (3.2.41-(D), 3.2.41-(N)) donne

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\beta_i} \int_{\Sigma_i} U^k(t, \cdot) &= u_i^k(t, 0) + \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) \sigma_i \\ &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'-1}}{\partial t^{2m'} \partial \hat{s}_i}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'+1}}{(2m'+1)!} \\ &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'}}{\partial t^{2m'}}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'}}{(2m')!} \end{aligned} \right. \quad (3.3.22)$$

Nous utilisons alors le résultat (3.3.11) avec $U = U^k(t, \cdot)$, $\Phi = \frac{\partial^2 U^{k-2}}{\partial t^2}(t, \cdot)$ et $g_i = g_i^{k-1}$ donnée par (3.3.20), pour obtenir la condition de saut suivante

$$\left| \begin{aligned} u_i^k(t, 0) - u_{i+1}^k(t, 0) &= \int_{\widehat{\mathcal{J}}} \frac{\partial^2 U^{k-2}}{\partial t^2}(t, \cdot) \mathcal{W}_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Sigma_j} g_j^{k-1} \mathcal{W}_i \\ &+ \frac{\partial u_{i+1}^{k-1}}{\partial \hat{s}_{i+1}}(t, 0) \sigma_{i+1} - \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) \sigma_i \\ &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_{i+1}^{k-2m'-1}}{\partial t^{2m'} \partial \hat{s}_{i+1}}(t, 0) \frac{\sigma_{i+1}^{2m'+1}}{(2m'+1)!} - \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'-1}}{\partial t^{2m'} \partial \hat{s}_i}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'+1}}{(2m'+1)!} \\ &+ \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_{i+1}^{k-2m'}}{\partial t^{2m'}}(t, 0) \frac{\sigma_{i+1}^{2m'}}{(2m')!} - \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'}}{\partial t^{2m'}}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'}}{(2m')!} \end{aligned} \right. \quad (3.3.23)$$

Pour chaque k , nous avons réussi à découpler le calcul des u_i^k au calcul de U^k puisque la condition de saut (3.3.23) et la condition de moyenne (3.3.21) suffisent à déterminer de manière unique u_i^k - il s'agit du résultat du lemme 3.3.6.

Enfin, comme solution du problème (3.3.8) avec $\Phi = \frac{\partial^2 U^{k-2}}{\partial t^2}(t, \cdot)$ et $g_i = g_i^{k-1}$ donnée par (3.3.20), $U^k(t, \cdot)$ est définie à une unique constante près. Pour fixer la valeur de cette constante, nous utilisons de nouveau (3.3.22), mais de manière symétrique par rapport à i :

$$\left| \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i} \int_{\Sigma_i} U^k(t, \cdot) &= \sum_{i=1}^N u_i^k(t, 0) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) \sigma_i \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'-1}}{\partial t^{2m'} \partial \hat{s}_i}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'+1}}{(2m'+1)!} \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{m'=1}^{k/2} \frac{\partial^{2m'+1} u_i^{k-2m'}}{\partial t^{2m'}}(t, 0) \frac{\sigma_i^{2m'}}{(2m')!} \end{aligned} \right. \quad (3.3.24)$$

Finalement, nous avons obtenu un problème équivalent à (3.2.10, 3.2.11), (3.2.12, 3.2.13) $_{\hat{J}}$, (3.2.41-(D)) et (3.3.7) en remplaçant (3.2.41-(D)) par (3.3.21), (3.3.23) et (3.3.24). Plus précisément :

Théorème 3.3.10. *Les deux problèmes sont équivalents (afin d'améliorer la clarté de la notation, nous omettons le cadre fonctionnel)*

- (i) $\{u_1^k, \dots, u_N^k, U^k, \quad k \geq 0\}$ est solution de (3.2.10, 3.2.11), (3.2.12, 3.2.13) $_{\hat{J}}$, (3.2.41-(D)) et (3.3.7)
- (ii) $\{u_-^k, \dots, u_N^k, U^k, \quad k \geq 0\}$ est solution de (3.2.10, 3.2.11, 3.3.21, 3.3.23) et (3.2.12, 3.2.13) $_{\hat{J}}$, (3.3.7, 3.3.24) avec g_i^{k-1} définie par (3.3.20).

Démonstration. La preuve de ce théorème est identique à la preuve du théorème 2.3.5. \square

Maintenant, nous allons montrer que le problème (3.2.10, 3.2.11, 3.3.21, 3.3.23) et (3.2.12, 3.2.13) $_{\hat{J}}$, (3.3.7, 3.3.24) avec g_i^{k-1} défini par (3.3.20), admet une unique solution $\{u_-^k, \dots, u_N^k, U^k, \quad k \geq 0\}$, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Le cas $k = 0$. Avec la convention de la remarque 2.2.6, nous déduisons de (3.2.10, 3.2.11, 3.3.21) et (3.3.23) que u_i^0 est, comme attendu, la solution du problème limite (3.1.10).

De plus, nous pouvons voir que la fonction $U^0(t, \cdot)$ résout le problème (3.3.8) avec $\Phi = 0$ et $g_i = 0$. Nous en déduisons que la fonction U^0 ne dépend que de du temps, et cette dépendance est fixée par

$$U^0(t, \cdot) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i} \int_{\Sigma_i} U^0(t, \cdot) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^0(t, 0)$$

Le cas général $k > 0$. Supposons que $(u_1^\ell, \dots, u_N^\ell, U^\ell)$ sont connus jusqu'à $\ell = k - 1$. Alors :

- Nous déterminons (u_1^k, \dots, u_N^k) comme étant l'unique solution du problème (3.2.10, 3.2.11, 3.3.21, 3.3.23) - il s'agit du lemme 3.3.6,
- nous calculons g_i^{k-1} grâce à (3.3.20),
- nous déterminons U^k comme l'unique solution (cf. lemme 3.3.3) du problème (3.3.8) pour $\Phi = \frac{\partial^2 U^{k-2}}{\partial t^2}(t, \cdot)$ et $g_i = g_i^{k-1}$, avec la condition de moyenne (3.3.24). Nous devons bien sûr vérifier la condition de compatibilité (3.3.9), mais cette condition de compatibilité n'est rien d'autre que la condition de moyenne (3.3.21) écrite pour " $k = k - 1$ ".

Finalement, en regroupant ces résultats avec les théorèmes 3.3.2 et 3.3.10, nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.3.11. *Il existe une unique famille $\{u_1^k, \dots, u_N^k, U^k, \quad k \geq 0\}$ solution de (3.2.10, 3.2.11, 3.2.12, 3.2.13) et vérifiant les conditions de raccord (3.2.41) et de croissance (3.2.39).*

Remarque 3.3.12. En fait, par construction, nous pouvons voir que les sauts \mathbf{a} et \mathbf{j} intervenant dans l'écriture du problème (3.3.12) définissant la fonction $(u_i^k)_{1 \leq i \leq N}$ dépendent des dérivées $\ell^{\text{ième}}$ de $u_i^{k-\ell}$. Donc, si nous voulons construire le terme u_i^k du développement, la régularité réelle que nous avons besoin sur u^0 est

$$u_i^0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbf{H}^{k+1}(]0, L_i[)) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbf{H}^k(]0, L_i[))$$

et puisque le problème satisfait par u^0 est un problème classique, nous devons avoir

$$\mathbf{f}_i \in \mathbf{H}^{k+1}(]0, L_i[)$$

$$\mathbf{g}_i \in \mathbf{H}^k(]0, L_i[)$$

3.3.2 Estimations d'erreurs

Dans cette section, nous allons démontrer que nous pouvons construire une fonction approchée dont la différence avec la fonction exacte u^ε diffère d'un terme dépendant entre autres de ε aussi petit que l'on veut. Nous allons donner deux estimations : une estimation globale sur tout le domaine Ω^ε , et une estimation locale sur chacune des fentes. Afin de ne pas alourdir cette partie, nous supposons que les données de Cauchy sont \mathcal{C}^∞ .

3.3.2.1 Estimation d'erreur globale

Nous considérons $\varphi \in \mathcal{C}$ (rappel : \mathcal{C} donnée par (2.2.8) est la classe des fonctions $\varepsilon \mapsto \varphi(\varepsilon)$ qui tendent vers 0 lorsque ε tend vers 0, mais moins rapidement que $\varepsilon|\ln(\varepsilon)|$), et nous introduisons une famille de fonctions de troncatures Φ^ε , dépendantes de $\varphi(\varepsilon)$, telles que

$$\Phi^\varepsilon(\hat{s}) = \Phi\left(\frac{\hat{s}}{\varphi(\varepsilon)}\right) \quad \text{avec} \quad \Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+), \quad \text{supp } \Phi \in [0, 2], \quad \Phi = 1 \text{ sur } [0, 1] \quad (3.3.25)$$

à partir de laquelle nous construisons une fonction de troncature bi-dimensionnelle $\widehat{\Phi}^\varepsilon : \Omega_\alpha^\varepsilon \rightarrow [0, 1]$ telle que

- sur J^ε , $\widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$,
- sur Ω_i^ε , $\widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \Phi^\varepsilon(\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^i)$,

l'idée étant de considérer une fonction de troncature dont les variations sont à support dans les domaines de raccord $\mathcal{O}_\pm^\varepsilon$. Bien entendu, nous aurons à un moment donné à faire le choix de la fonction φ .

Ensuite, étant donné $k \in \mathbb{N}$, nous proposons la fonction globale suivante (une idée naturelle est alors de choisir φ dépendante de k) :

$$\tilde{u}_k^\varepsilon(t, \mathbf{x}) := (1 - \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x})) \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^k \varepsilon^m u_i^m(t, (\Xi_i^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) + \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \sum_{m=0}^k \varepsilon^m U^k(t, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) \quad (3.3.26)$$

Par hypothèse sur les données de Cauchy, nous avons, pour ε suffisamment petit

$$\mathcal{E}^\varepsilon(0, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon) = 0 \quad (3.3.27)$$

Nous allons maintenant étudier la dérivée de l'énergie $\mathcal{E}^\varepsilon(t, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)$ par rapport à t . En utilisant la formule d'intégrations par parties de Green-Riemann, et en utilisant le fait que $u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon$ satisfait une condition de Neumann homogène sur le bord de Ω^ε , nous avons, en notant $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

$$\frac{\partial \mathcal{E}^\varepsilon(\cdot, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega^\varepsilon} \square(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)(t, \mathbf{x}) \frac{\partial (u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.3.28)$$

Or, nous savons que u^ε vérifie le problème exact (3.1.4), donc $\square u^\varepsilon = 0$. Il nous reste donc à estimer $\square u_k^\varepsilon$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \square \tilde{u}_k^\varepsilon(t, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^k (1 - \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x})) \varepsilon^m \square (u_i^m(\cdot, (\Xi_i^\varepsilon)^{-1} \cdot)) (t, \mathbf{x}) \\ &+ \sum_{m=0}^k \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \varepsilon^m \square (U^m(\cdot, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} \cdot)) (t, \mathbf{x}) \\ &+ 2 \sum_{m=0}^k \nabla \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \varepsilon^m \nabla \left(U^m(\cdot, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} \cdot) - \sum_{i=1}^N u_i^m(\cdot, (\Xi_i^\varepsilon)^{-1} \cdot) \right) (t, \mathbf{x}) \\ &+ \sum_{m=0}^k \Delta \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \varepsilon^m \left(U^m(t, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) - \sum_{i=1}^N u_i^m(t, (\Xi_i^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) \right) \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Nous allons traiter séparément chaque terme de (3.3.29).

- Le premier terme est le plus facile à traiter. Pour chaque fonction u_i^m , nous avons, en utilisant (3.2.11-(ii)) :

$$\square (u_i^m(\cdot, (\Xi_i^\varepsilon)^{-1} \cdot)) (t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 u_i^m}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i^m}{\partial s_i^2} \right) (t, (\Xi_i^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) = 0$$

Le premier terme est donc nul.

- Le second terme se traite quasiment de la même façon. Pour chaque fonction U^m , nous avons, en utilisant (3.2.12) :

$$\square (U^m(\cdot, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} \cdot)) (t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 U^m}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 U^{m-2}}{\partial t^2} \right) (t, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x}))$$

Nous avons ainsi

$$\sum_{m=0}^k \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \varepsilon^m \square (U^m(\cdot, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} \cdot)) (t, \mathbf{x}) = \varepsilon^{k-1} \frac{\partial^2 U^{k-1}}{\partial t^2} (t, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) + \varepsilon^k \frac{\partial^2 U^k}{\partial t^2} (t, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x}))$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega^\varepsilon} \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \left(\sum_{m=0}^k \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \varepsilon^m \square (U^m(\cdot, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1} \cdot)) (t, \mathbf{x}) \right) \frac{\partial (u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t} (t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \varepsilon^{k-1} \int_{\Omega^\varepsilon} \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial^2 U^{k-1}}{\partial t^2} (t, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) \right| \left| \frac{\partial (u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t} (t, \mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \\ &+ \varepsilon^k \int_{\Omega^\varepsilon} \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial^2 U^k}{\partial t^2} (t, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) \right| \left| \frac{\partial (u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t} (t, \mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Nous allons étudier le premier terme du membre de droite de l'inégalité (3.3.30) (le second terme se traite de la même manière). Nous avons, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et en majorant $\widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x})$ par 1 :

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{k-1} \int_{\Omega^\varepsilon} \widehat{\Phi}^\varepsilon(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial^2 U^{k-1}}{\partial t^2} (t, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) \right| \left| \frac{\partial (u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t} (t, \mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \\ &< \varepsilon^{k-1} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} \left| \frac{\partial^2 U^{k-1}}{\partial t^2} (t, (\Xi_J^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{x})) \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} \left| \frac{\partial (u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t} (t, \mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

En faisant alors des calculs analogues aux calculs effectués pour majorer le second terme de (2.3.22), nous pouvons majorer le membre de droite de (3.3.31) par

$$C_{k-1}(t)\varphi(\varepsilon)^{k-\frac{1}{2}}\sqrt{\mathcal{E}^\varepsilon(t, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)} \quad (3.3.32)$$

- Les troisième et quatrième termes se traitent de la même manière que les troisième et quatrième termes de (2.3.22). Nous obtenons de nouveau une majoration de ces termes par

$$C'_k(t)\varphi(\varepsilon)^{k-\frac{1}{2}}\sqrt{\mathcal{E}^\varepsilon(t, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)} \quad (3.3.33)$$

Finalement, nous avons l'estimation suivante :

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}^\varepsilon(\cdot, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t) \right| \leq C_k(t)\varphi(\varepsilon)^{k-\frac{1}{2}}\sqrt{\mathcal{E}^\varepsilon(t, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)} \quad (3.3.34)$$

où $C_k(t)$ est une fonction ne dépendant que des données de Cauchy \mathbf{f} et \mathbf{g} , et de k . En utilisant une inégalité de la moyenne, et en utilisant la condition initiale (3.3.27), nous avons la relation suivante :

$$\mathcal{E}^\varepsilon(t, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon) \leq \varphi(\varepsilon)^{k-\frac{1}{2}} \int_0^t C_k(\tau)\sqrt{\mathcal{E}^\varepsilon(\tau, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}d\tau \quad (3.3.35)$$

Pour conclure, nous utilisons le lemme suivant

Lemme 3.3.13. *Soit $\varphi(t)$ et $m(t)$ deux fonctions positives continues définies sur $[0, T]$ telles que*

$$\varphi(t) \leq \int_0^t m(\tau)\sqrt{\varphi(\tau)}d\tau, \quad \forall t \in (0, T)$$

Alors

$$\varphi(t) \leq \frac{1}{4} \left(\int_0^t m(\tau)d\tau \right)^2$$

Démonstration. Nous admettons ce lemme. Le lecteur pourra trouver une preuve par exemple dans [Bih56] pour un cas plus général. \square

Nous utilisons le lemme 3.3.13 avec la majoration initiale (3.3.35), et nous obtenons finalement le théorème suivant :

Théorème 3.3.14. *Il existe une fonction C_k ne dépendant que de k , des données de Cauchy et de t telle que*

$$\mathcal{E}^\varepsilon(t, u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon) \leq C_k(t)\varphi(\varepsilon)^{2k-1} \quad (3.3.36)$$

3.3.2.2 Estimation d'erreur locale

Nous obtenons une meilleure estimation si nous restreignons le domaine sur lequel nous faisons notre estimation d'erreur. Nous regardons l'erreur dans les domaines

$$\Omega_{i,\delta}^\varepsilon = \{ \mathbf{x} \in \Omega_i^\varepsilon \text{ tel que } \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^i \geq \delta_i \}, \quad \delta > \varepsilon\sigma_i$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, nous introduisons la fonction u_k^ε définie par

$$u_k^\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=0}^k \varepsilon^m u_i^m(t, \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^i) \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \Omega_{i,\delta}^\varepsilon \quad (3.3.37)$$

Théorème 3.3.15. *Quel que soit $0 < \delta < \min L_i$, nous pouvons construire la fonction approchée \mathbf{u}_k^ε définie par (3.3.37). Alors :*

- pour ε tel que $2\varepsilon^{\frac{2n+2}{2n+3}} \leq \delta$, nous avons $\mathbf{u}_k^\varepsilon = \tilde{u}_k^\varepsilon$ sur chaque domaine $\Omega_{i,\delta}^\varepsilon$,
- nous avons l'estimation d'erreur suivante : il existe une fonction $C_{k,\delta}$ ne dépendant que de k , δ et de t telle que

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{i,\delta}^\varepsilon} \left| \frac{\partial(u^\varepsilon - \mathbf{u}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + |\nabla(u^\varepsilon - \mathbf{u}_k^\varepsilon)(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq C_{k,\delta}(t)\varepsilon^{2k+2} \quad (3.3.38)$$

Démonstration. Supposons que nous connaissons la fonction $\varphi(\varepsilon)$ servant au découpage du domaine. Nous prenons alors δ tel que $2\varphi(\varepsilon) \leq \delta$. De cette manière sur les domaines $\Omega_{i,\delta}^\varepsilon$, la fonction de troncature $\hat{\Phi}^\varepsilon$ vaut 0, et il est alors facile de voir que $\mathbf{u}_k^\varepsilon = \tilde{u}_k^\varepsilon$. Le membre de gauche de l'inégalité (3.3.38) que nous voulons estimer devient

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{i,\delta}^\varepsilon} \left| \frac{\partial(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + |\nabla(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (3.3.39)$$

Nous décomposons alors la fonction $u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon$ sous la forme

$$u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon = (u^\varepsilon - \tilde{u}_{k+2}^\varepsilon) + (\tilde{u}_{k+2}^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon).$$

En utilisant alors une inégalité du type $(a+b)^2 \leq a^2 + b^2$, nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{i,\delta}^\varepsilon} \left| \frac{\partial(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + |\nabla(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right. \\ & \leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{i,\delta}^\varepsilon} \left| \frac{\partial(u^\varepsilon - \tilde{u}_{k+2}^\varepsilon)}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + |\nabla(u^\varepsilon - \tilde{u}_{k+2}^\varepsilon)(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ & \left. + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{i,\delta}^\varepsilon} \left| \frac{\partial(\tilde{u}_{k+2}^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + |\nabla(\tilde{u}_{k+2}^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

Le premier terme du membre de droite de cette inégalité peut être majoré, en remarquant que les domaines $\Omega_{i,\delta}^\varepsilon$ sont disjoints car $\delta > \varepsilon\sigma_i$, par $\mathcal{E}^\varepsilon(t, u^\varepsilon - \tilde{u}_{k+2}^\varepsilon)$; nous utilisons alors l'estimation (3.3.36) donnée par le théorème 3.3.14. Le second terme est plus facile à traiter : puisque $2\varphi(\varepsilon) \leq \delta$, la fonction de troncature $\hat{\Phi}^\varepsilon$ vaut 0, et nous avons

$$\tilde{u}_{k+2}^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon \leq \varepsilon^{k+1} u_i^{k+1} + \varepsilon^{k+2} u_i^{k+2} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \Omega_{i,\delta}^\varepsilon$$

Nous obtenons finalement l'estimation suivante

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{i,\delta}^\varepsilon} \left| \frac{\partial(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + |\nabla(u^\varepsilon - \tilde{u}_k^\varepsilon)(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq C_{k+2}(t)\varphi(\varepsilon)^{2k+3} + C_{k,\delta}(t)\varepsilon^{2k+2} \quad (3.3.41)$$

Maintenant, nous prenons comme fonction $\varphi : \varepsilon \mapsto \varepsilon^{\frac{2k+2}{2k+3}}$ pour conclure. \square

3.4 Construction et analyse des conditions de Kirchhoff améliorées

Nous savons maintenant que les fonctions (u_i^k) sont bien définies grâce au théorème 3.3.11, et que le théorème 3.3.15 nous dit que le développement tronqué de la solution à l'ordre k diffère de la solution exacte en ε^{k+1} . *A priori*, si nous voulons connaître une approximation de la solution à l'ordre k sur un intervalle $(0, T)$, il faut :

- résoudre $k + 1$ problèmes de Helmholtz sur $(0, T)$ sur chacune des N fentes, avec des conditions de couplage ;
- résoudre $k + 1$ problèmes de Laplace sur $(0, T)$ sur la jonction.

Au lieu de cela, nous allons construire une fonction \tilde{u}^ε définie sur $\cup S_i$ qui va être solution d'un problème d'équation d'onde bien posé, et dont l'approximation à l'ordre k est exactement \mathbf{u}_k^ε , où \mathbf{u}_k^ε est la fonction définie par (3.3.37). L'avantage de pouvoir définir une telle fonction est qu'elle sera une approximation à l'ordre k de la solution u^ε du problème d'acoustique 2D, mais sera donnée par la résolution d'un seul problème de Helmholtz 1D (modulo la résolution d'un certain nombre de problèmes de Laplace).

3.4.1 Construction des conditions de Kirchhoff

Notons $u^{\varepsilon,1}$ la fonction définie sur $\mathcal{C}^{1,2}(S_1) \times \dots \times \mathcal{C}^{1,2}(S_N)$ par

$$u^{\varepsilon,1}(t, \hat{s}_i) = u_i^0(t, \hat{s}_i) + \varepsilon u_i^1(t, \hat{s}_i) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times S_i \quad (3.4.1)$$

où u_i^0 et u_i^1 sont les fonctions du développement (3.2.8-(i)). Nous savons déjà, en utilisant (3.2.11-(ii)) et en utilisant les données de Cauchy, que $u^{\varepsilon,1}$ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon,1}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}_i^2} = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times (0, L_i) \\ u_i^{\varepsilon,1}(t, \cdot) = \mathbf{f}_i, & \text{dans } (0, L_i) \\ \frac{\partial u_i^{\varepsilon,1}}{\partial t}(t, \cdot) = \mathbf{g}_i, & \text{dans } (0, L_i) \end{cases} \quad (3.4.2)$$

D'après le lemme 3.3.6, $u^{\varepsilon,1}$ est déterminée de manière unique si nous connaissons la moyenne des dérivées normales intérieures (vis-à-vis de la fente) $\hat{s}_i = 0$ et les différents sauts de la fonction en $\hat{s}_i = 0$. L'idée *a priori* est d'écrire ces différentes quantités en fonction de $u^{\varepsilon,1}$ elle-même.

3.4.1.1 Écriture de la condition de moyenne

Nous partons de (3.3.21) écrite successivement pour $k = 0$ et pour $k = 1$, et nous obtenons

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) = 0 \quad (3.4.3-(i))$$

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^1}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) = \int_{\hat{J}} \frac{\partial^2 U^0}{\partial t^2}(t, \hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}(t, 0) \quad (3.4.3-(ii))$$

Puisque U^0 est constant égal à $u^0(\cdot, 0)$, nous pouvons écrire

$$\int_{\hat{J}} \frac{\partial^2 U^0}{\partial t^2}(t, \hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} = \frac{\text{area}(\hat{J})}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}(t, 0) \quad (3.4.4)$$

Une première idée serait de prendre (3.4.3-(i) + ε 3.4.3-(ii)), d'utiliser (3.4.4) et de négliger le terme en ε^2 , pour obtenir

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{area}(\hat{J})}{N} - \beta_i \sigma_i \right) \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon,1}}{\partial t^2}(t, 0)$$

Malheureusement, on ne contrôle pas le signe de la quantité $\left(\frac{\text{area}(\hat{J})}{N} - \beta_i \sigma_i \right)$; et généralement, cette quantité est strictement négative, ce qui pose des problèmes pour la stabilité du problème continu (on obtient la conservation d'une quantité dont tous les termes n'ont pas le même signe) et des problèmes d'explosion numérique.

Une idée astucieuse est de faire basculer le terme $\sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}(t, 0)$ dans le membre de gauche de (3.4.3-(ii)), puis de considérer le membre de gauche de (3.4.3-(i) + ε 3.4.3-(ii)) comme les premiers termes du développement de Taylor des fonctions $\frac{\partial u_i^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}_i}$ écrites en $\hat{s}_i = \varepsilon \sigma_i$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}_i}(t, \varepsilon \sigma_i) &= \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial \hat{s}_i^2}(t, 0) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^1}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) + O(\varepsilon^2) \\ &= \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}(t, 0) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^1}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \int_{\hat{J}} \frac{\partial^2 U^0}{\partial t^2}(t, \hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \frac{\text{Vol}(\hat{J})}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}(t, 0) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \frac{\text{Vol}(\hat{J})}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon,1}}{\partial t^2}(t, \varepsilon \sigma_i) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Nous allons réécrire cette condition sous forme vectorielle, en introduisant de nouvelles notations et en négligeant le terme en $O(\varepsilon^2)$.

Définition 3.4.1. Soit $(v_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{\pm*}, H^1(0, L_i)))_{1 \leq i \leq N}$ une famille de fonctions. Nous introduisons les vecteurs suivants :

$$V^\varepsilon(t) = (v_i(t, \varepsilon \sigma_i))_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N \tag{3.4.6-(i)}$$

$$\partial_S V^\varepsilon(t) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial \hat{s}_i}(t, \varepsilon \sigma_i) \right)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N \tag{3.4.6-(ii)}$$

Cela revient à lire les valeurs des fonctions v_i aux points se trouvant sur la frontière $\varepsilon \Gamma_i$ - ces points sont indiqués en bleu sur la figure 3.8.

Définition 3.4.2 (Matrice de poids). La matrice de poids $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale donnée par

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_N \end{pmatrix} \tag{3.4.7}$$

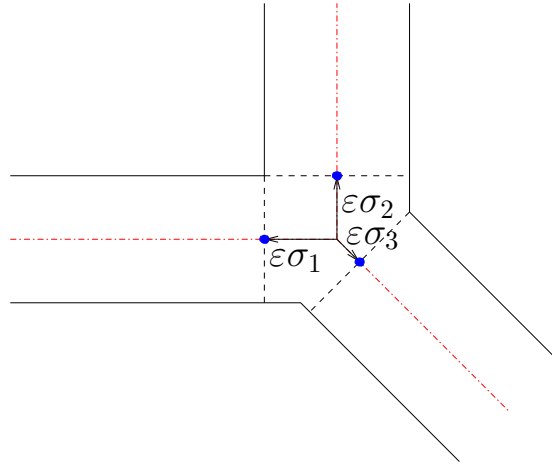


FIGURE 3.8 – Points utilisés pour les valeurs des vecteurs (3.4.6-(i)) et (3.4.6-(ii))

Définition 3.4.3 (Matrice de moyenne). La matrice de moyenne $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est la matrice donnée par

$$\mathcal{A} = \frac{\text{Vol}(\hat{\mathcal{J}})}{N^2} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.8)$$

Définition 3.4.4 (Produit scalaire dans \mathbb{R}^N et vecteur constant). Soient A, B deux vecteurs de \mathbb{R}^N . Nous notons leur produit scalaire (A, B) défini par

$$(A, B) = A^T B = \sum_{i=1}^N A_i B_i$$

Nous notons également $\mathbf{1}$ le vecteur constant dans \mathbb{R}^N défini par $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$.

Nous pouvons alors réécrire la condition (3.4.5) sous forme vectorielle :

$$\frac{(\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t), \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} = \varepsilon \mathcal{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U^{\varepsilon,1}(t) \quad (3.4.9)$$

3.4.1.2 Écriture des conditions de saut

Nous regardons également le problème satisfait par $U^1(t, \cdot)$. Nous prenons la relation (3.3.22) pour $k = 0$ et pour $k = 1$, et nous faisons la différence entre deux valeurs successives de i . Nous obtenons alors

$$u_i^0(t, 0) - u_{i+1}^0(t, 0) = 0 \quad (3.4.10-(i))$$

$$u_i^1(t, 0) + \sigma_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) - u_{i+1}^1(t, 0) - \sigma_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}^0}{\partial \hat{s}_{i+1}}(t, 0) = \frac{1}{\beta_i} \int_{\Sigma_i} U^1(t, \cdot) - \frac{1}{\beta_{i+1}} \int_{\Sigma_{i+1}} U^1(t, \cdot) \quad (3.4.10-(ii))$$

Nous rappelons le problème vérifié par chaque fonction \mathcal{W}_i , pour $1 \leq i \leq N - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{W}_i = 0 \quad \text{dans } \hat{\mathcal{J}} \\ \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial n} + T_i \mathcal{W}_i = \frac{1}{\beta_i} \quad \text{sur } \Sigma_i \\ \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial n} + T_{i+1} \mathcal{W}_i = -\frac{1}{\beta_{i+1}} \quad \text{sur } \Sigma_{i+1} \\ \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial n} + T_j \mathcal{W}_i = 0, \quad \text{sur } \Sigma_j, \quad j \neq i \text{ et } j \neq i + 1 \\ \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \hat{\mathcal{J}} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \Sigma_i \right) \end{array} \right. \quad (3.4.11)$$

et nous rappelons le problème vérifié par U^1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U^1 = 0 \quad \text{dans } \hat{\mathcal{J}} \\ \frac{\partial U^1}{\partial n} + T_i U^1 = \frac{\partial u_i^0}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) \quad \text{sur } \Sigma_i \\ \frac{\partial U^1}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \hat{\mathcal{J}} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \Sigma_i \right) \end{array} \right. \quad (3.4.12)$$

Afin de pouvoir écrire notre condition de saut, nous allons introduire la matrice suivante

Définition 3.4.5 (Matrice de passage). La matrice de passage $P \in \mathcal{M}_{N-1, N}(\mathbb{R})$ est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4.13)$$

En utilisant cette matrice de passage, nous allons réécrire le membre de droite de (3.4.10-(ii)) en fonction de $\frac{\partial u_i^0}{\partial \hat{s}_i}$.

Proposition 3.4.6. *Il existe un vecteur $\Phi^0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^{N-1})$ tel que*

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \frac{\partial u_1^0}{\partial \hat{s}_1}(t, 0) \\ \vdots \\ \beta_N \frac{\partial u_N^0}{\partial \hat{s}_N}(t, 0) \end{pmatrix} = P^T \Phi^0(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^* \quad (3.4.14)$$

Démonstration. Appelons $\partial_S U^0(t) = \left(\beta_1 \frac{\partial u_1^0}{\partial \hat{s}_1}(t, 0), \dots, \beta_N \frac{\partial u_N^0}{\partial \hat{s}_N}(t, 0) \right)^T$. La condition (3.4.3-(i)) peut se réécrire sous la forme $(\partial_S U^0(t), \mathbb{1}) = 0$. Or, il est facile de voir que la matrice P est une matrice de rang $N - 1$ (le bloc composé des $N - 1$ premières colonnes est inversible), donc son noyau est de dimension 1. Comme $P\mathbb{1} = 0$, nous avons $\text{Ker } P = \text{vect}(\mathbb{1})$. Nous en déduisons alors que le vecteur $\partial_S U^0(t)$ est orthogonal au noyau de la matrice P . Un résultat sur le lien entre le noyau d'une matrice et l'image de sa transposée, que nous pouvons par exemple trouver dans [MMZ07], nous dit que $\partial_S U^0(t)$ est dans l'image de P^T , d'où (3.4.14). \square

Grâce à la proposition 3.4.6, et en utilisant le fait que le problème intérieur (3.3.8) admet une unique solution à une constante additive près, nous pouvons écrire U^1 sous la forme

$$U^1(t, \cdot) = \frac{1}{\text{Vol}(\widehat{J})} \int_{\widehat{J}} U^1(t, \widehat{\mathbf{x}}) d\widehat{\mathbf{x}} + \sum_{j=1}^{N-1} \Phi_i^0(t) \mathcal{W}_j \quad (3.4.15)$$

Nous utilisons alors la relation (3.3.11) du corollaire 3.3.5 pour écrire le saut de U^1 sous la forme

$$\frac{1}{\beta_i} \int_{\Sigma_i} U^1(t, \cdot) - \frac{1}{\beta_{i+1}} \int_{\Sigma_{i+1}} U^1(t, \cdot) = \sum_{j=1}^{N-1} \left(\int_{\widehat{J}} \nabla \mathcal{W}_i \nabla \mathcal{W}_j + \sum_{\ell=1}^{N-1} \int_{\Gamma_\ell} \mathcal{W}_i T_\ell \mathcal{W}_j \right) \Phi_i^0(t) \quad (3.4.16)$$

Il est alors naturel d'introduire la matrice suivante

Définition 3.4.7. La matrice $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\mathcal{K}_{i,j} = \int_{\widehat{J}} \nabla \mathcal{W}_i \nabla \mathcal{W}_j + \sum_{\ell=1}^{N-1} \int_{\Gamma_\ell} \mathcal{W}_i T_\ell \mathcal{W}_j$$

Remarque 3.4.8. En utilisant de nouveau la relation (3.3.11) du corollaire 3.3.5 avec la fonction $U = \mathcal{W}_j$, nous avons également

$$\mathcal{K}_{i,j} = \frac{1}{\beta_i} \int_{\Gamma_i} \mathcal{W}_j - \frac{1}{\beta_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} \mathcal{W}_j$$

Nous pouvons alors voir que le membre de droite de la relation (3.4.16) est la $i^{\text{ème}}$ ligne du produit $\mathcal{K}\Phi^0(t)$. Nous pouvons également voir que

$$\begin{aligned} u_i^{\varepsilon,1}(t, \varepsilon\sigma_i) - u_{i+1}^{\varepsilon,1}(t, \varepsilon\sigma_{i+1}) &= u_i^0(t, 0) - u_{i+1}^0(t, 0) \\ &+ \varepsilon \left(u_i^1(t, 0) + \sigma_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) - u_{i+1}^1(t, 0) - \sigma_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}^0}{\partial \hat{s}_{i+1}}(t, 0) \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

En remarquant que $u_i^{\varepsilon,1}(t, \varepsilon\sigma_i) - u_{i+1}^{\varepsilon,1}(t, \varepsilon\sigma_{i+1})$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne du produit $PU^{\varepsilon,1}(t)$, en utilisant (3.4.10) et (3.4.16), nous avons

$$PU^{\varepsilon,1}(t) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon \mathcal{K}\Phi^0(t) \quad (3.4.18)$$

D'autre part, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.4.9. *Nous avons la relation*

$$\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t) - \frac{(\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t), \mathbb{1})}{(\mathbb{1}, \mathbb{1})} \mathbb{1} = P^T (\Phi^0(t) + O(\varepsilon)) \quad (3.4.19)$$

Démonstration. Il est facile de voir que

$$\left(\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t) - \frac{(\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t), \mathbb{1})}{(\mathbb{1}, \mathbb{1})} \mathbb{1}, \mathbb{1} \right) = 0$$

En suivant le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 3.4.6, il existe un vecteur $\Phi^\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^{N-1})$ tel que

$$\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t) - \frac{(\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t), \mathbb{1})}{(\mathbb{1}, \mathbb{1})} \mathbb{1} = P^T \Phi^\varepsilon(t)$$

Or, le membre de gauche de cette relation est égal à $\left(\beta_1 \frac{\partial u_1^0}{\partial \hat{s}_1}(t, 0), \dots, \beta_N \frac{\partial u_N^0}{\partial \hat{s}_N}(t, 0) \right)^T + O(\varepsilon)$, en réutilisant de nouveau (3.4.3-(i)). Nous obtenons alors $\Phi^\varepsilon(t) = \Phi^0(t) + O(\varepsilon)$, d'où (3.4.19). \square

Nous pouvons voir dans les relations (3.4.18) et (3.4.19) l'apparition d'un vecteur $\Phi^0(t)$. En négligeant les termes en $O(\dots)$, nous avons envie d'écrire

$$\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t) - \frac{(\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t), \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} = \frac{1}{\varepsilon} P^T \mathcal{K}^{-1} P U^{\varepsilon,1}(t) \quad (3.4.20)$$

Pour pouvoir écrire cette relation, nous avons besoin de savoir que la matrice \mathcal{K} est une matrice inversible. L'inversibilité de cette matrice est obtenue grâce à la proposition suivante

Proposition 3.4.10. \mathcal{K} est une matrice symétrique définie positive (donc inversible).

Démonstration. Nous avons

$$\mathcal{K}_{i,j} = \int_{\hat{\mathcal{J}}} \nabla \mathcal{W}_i \nabla \mathcal{W}_j + \sum_{\ell=1}^{N-1} \int_{\Gamma_\ell} \mathcal{W}_i T_\ell \mathcal{W}_j$$

La symétrie de \mathcal{K} est obtenue en utilisant la symétrie de chaque opérateur. Pour la partie positivité, soit $Y \in \mathbb{R}^{N-1}$. Nous avons, par bi-linéarité et en appelant $\mathcal{W}^Y = \sum Y_i \mathcal{W}_i$:

$$Y^T \mathcal{K} Y = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\int_{\hat{\mathcal{J}}} \nabla \mathcal{W}_i \nabla \mathcal{W}_j + \sum_{\ell=1}^{N-1} \int_{\Gamma_\ell} \mathcal{W}_i T_\ell \mathcal{W}_j \right) = \int_{\hat{\mathcal{J}}} \nabla \mathcal{W}^Y \nabla \mathcal{W}^Y + \sum_{\ell=1}^{N-1} \int_{\Gamma_\ell} \mathcal{W}^Y T_\ell \mathcal{W}^Y \geq 0$$

De plus, si $Y^T \mathcal{K} Y$, alors par positivité des opérateurs T_ℓ nous avons

$$\int_{\hat{\mathcal{J}}} \nabla \mathcal{W}^Y \nabla \mathcal{W}^Y = 0$$

Nous en déduisons alors que la donnée de Neumann de \mathcal{W}^Y sur chaque bord Γ_i est nulle. En regardant consécutivement $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, nous en déduisons consécutivement $Y_1 = 0, \dots, Y_{N-1} = 0$. \square

En notant $\mathcal{J} = P^T \mathcal{K}^{-1} P$, nous avons finalement

$$\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t) - \frac{(\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t), \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J} U^{\varepsilon,1}(t) \quad (3.4.21)$$

3.4.1.3 Conclusion

En additionnant (3.4.9) et (3.4.21), nous avons

$$\mathcal{B}\partial_S U^{\varepsilon,1}(t) = \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J} + \varepsilon \mathcal{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U^{\varepsilon,1}(t) \quad (3.4.22)$$

Remarque 3.4.11. Dans le cas d'une jonction de deux fentes de même épaisseur, où la jonction $\hat{\mathcal{J}}$ est donnée par la figure 2.2, nous avons $\text{Vol}(\hat{\mathcal{J}}) = \tan(\alpha)$ et $\mathcal{K} = K(\alpha)$, où $K(\alpha)$ est le coefficient donné par (2.4.8). La condition (3.4.22) se réécrit alors sous la forme

$$\partial_S U^{\varepsilon,1}(t) = \left(\frac{1}{\varepsilon K(\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon \tan(\alpha)}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U^{\varepsilon,1}(t)$$

3.4.2 Analyse des conditions de Kirchhoff

Nous allons démontrer que le problème défini par (3.4.2, 3.4.22) est bien posé, et que la solution de ce problème ne s'éloigne pas trop (dans un sens que l'on précisera) de la solution du problème exact.

3.4.2.1 Développement asymptotique

De la même manière que dans l'hypothèse 3.2.1, nous allons utiliser une hypothèse d'écriture pour la fonction $u^{\varepsilon,1}$ sur chaque fente S_i .

Hypothèse 3.4.12. Il existe $(\tilde{u}_i^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{1,2}(S_i)$ tel que

$$u^{\varepsilon,1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k \tilde{u}_i^k \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times (\varepsilon \sigma_i, L_i) \quad (3.4.23)$$

Nous pouvons voir facilement que les familles de fonctions \tilde{u}_i^k sont solutions des mêmes équations que les familles de fonctions u_i^k , avec les mêmes conditions en $\hat{s}_i = L_i$ et les mêmes données initiales.

Conditions de raccord - forme générale Nous introduisons, pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, le vecteur $\partial_{S^l} \tilde{U}^k(t)$ défini par

$$\partial_{S^l} \tilde{U}^k(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^l u_1^k}{\partial \hat{s}_1^l}(t, 0) \\ \vdots \\ \frac{\partial^l u_N^k}{\partial \hat{s}_N^l}(t, 0) \end{pmatrix}$$

En utilisant alors un développement de Taylor, et en notant \mathcal{S} la matrice diagonale de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dont le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal est égal à σ_i , nous avons

$$U^{\varepsilon,1}(t) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon^l}{l!} \mathcal{S}^l \partial_{S^l} \tilde{U}^k(t) \quad (3.4.24)$$

En utilisant le développement de Taylor (3.4.24) dans la condition de raccord (3.4.22), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J} \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^n \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon^l}{l!} \mathcal{S}^l \partial_{S^l} \tilde{U}^k(t) \\ & + \varepsilon \mathcal{A} \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^n \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon^l}{l!} \mathcal{S}^l \partial_{t^2 S^l} \tilde{U}^k(t) = \mathcal{B} \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^n \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon^l}{l!} \mathcal{S}^l \partial_{S^{l+1}} \tilde{U}^k(t) \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

L'identification des coefficients de (3.4.25) suivant les mêmes puissances de ε nous donne

- la puissance -1 de ε donne

$$\mathcal{J} \tilde{U}^0(t) = 0$$

- la puissance 0 de ε donne

$$\mathcal{J} \left(\mathcal{S} \partial_S \tilde{U}^0(t) + \tilde{U}^1(t) \right) = \mathcal{B} \partial_S \tilde{U}^0(t)$$

- la puissance $n+1$ de ε , avec $n \in \mathbb{N}$, donne

$$\begin{aligned} & \mathcal{J} \left(\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{(n+2-k)!} \mathcal{S}^{n+2-k} \partial_{S^{n+2-k}} \tilde{U}^k(t) \right) \\ & + \mathcal{A} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \mathcal{S}^{n-k} \partial_{t^2 S^{n-k}} \tilde{U}^k(t) \right) = \mathcal{B} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(n+1-k)!} \mathcal{S}^{n+1-k} \partial_{S^{n+2-k}} \tilde{U}^k(t) \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons voir alors que, pour une valeur de n donnée, les sauts du vecteur $\tilde{U}^n(t)$ sont donnés par le terme en ε^{n-1} de (3.4.25) : nous multiplions par P , et nous constatons que

$$P\mathcal{J} = PP^T\mathcal{K}^{-1}P$$

Puisque les matrices PP^T et \mathcal{K}^{-1} sont inversibles, nous obtenons

$$P \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \mathcal{S}^{n-k} \partial_{\mathcal{S}^{n-k}} \tilde{U}^k(t) \right) = \mathcal{K} (PP^T)^{-1} \mathcal{B} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-k)!} \mathcal{S}^{n-1-k} \partial_{\mathcal{S}^{n-k}} \tilde{U}^k(t) \right)$$

Nous pouvons alors en déduire $P\tilde{U}^n(t)$ à partir de la connaissance des \tilde{U}^{n-k} , avec $k > 0$. De plus, la moyenne du vecteur $\partial_{\mathcal{S}} \tilde{U}^N(t)$ est donnée par le produit scalaire du terme en ε^N de (3.4.25) par $\mathbf{1}$, et dépend uniquement de la connaissance des \tilde{U}^{n-k} , avec $k > 0$. Nous pouvons alors énoncer le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 3.4.13. *Il existe une unique famille $(\tilde{u}_i^k)_{i,k \in (1,\dots,N) \times \mathbb{N}}$ satisfaisant (3.4.2) et (3.4.24)*

Démonstration. La preuve de ce théorème se fait par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, en utilisant le lemme 3.3.6. \square

Conditions de raccord - premiers termes Maintenant que nous savons que la famille $(\tilde{u}_i^k)_{i,k \in (1,\dots,N) \times \mathbb{N}}$ est bien définie, nous allons montrer $\tilde{u}_i^0 = u_i^0$ et que $\tilde{u}_i^1 = u_i^1$, en montrant que ces deux familles vérifient les mêmes conditions de saut et de moyenne (encore une fois, le lemme 3.3.6 nous assure l'unicité).

Condition de moyenne Nous partons de la relation (3.4.22) et nous faisons le produit scalaire avec le vecteur $\mathbf{1}$ pour obtenir

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}_i}(t, \varepsilon \sigma_i) = \varepsilon \frac{\text{Vol}(\hat{J})}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon,1}}{\partial t^2}(t, \varepsilon \sigma_i) \quad (3.4.26)$$

Nous utilisons l'ansatz (3.4.23) avec un développement de Taylor de chaque fonction en $\hat{s}_i = 0$, et en regardant les termes en puissance 0 et 1 de ε , nous obtenons les relations suivantes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u_i^1}{\partial \hat{s}_i}(t, 0) + \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial \hat{s}_i^2}(t, 0) &= \frac{\text{Vol}(\hat{J})}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}(t, 0) \end{aligned}$$

qui ne sont rien d'autres que (3.4.3-(i)) et (3.4.3-(ii))+(3.4.4).

Conditions de saut Nous réécrivons la relation (3.4.22) en multipliant par ε , pour avoir

$$\mathcal{J}U^{\varepsilon,1}(t) = \varepsilon \mathcal{B} \partial_{\mathcal{S}} U^{\varepsilon,1}(t) - \varepsilon^2 \mathcal{A} \frac{\partial^2 U^{\varepsilon,1}}{\partial t^2}(t) \quad (3.4.27)$$

Le membre de gauche de (3.4.22) est orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$, donc au noyau de P . Dans ce cas-là, le membre de droite l'est aussi, et il existe alors Ψ^ε tel que

$$\mathcal{B} \partial_{\mathcal{S}} U^{\varepsilon,1}(t) - \varepsilon \mathcal{A} \frac{\partial^2 U^{\varepsilon,1}}{\partial t^2}(t) = P^T \Psi^\varepsilon(t) \quad (3.4.28)$$

Nous obtenons alors, en injectant (3.4.28) dans (3.4.27) et en utilisant l'injectivité de la matrice P^T , ainsi que l'inversibilité de la matrice \mathcal{K} :

$$PU^{\varepsilon,1}(t) = \varepsilon \mathcal{K} \Psi^\varepsilon(t) \quad (3.4.29)$$

En utilisant de nouveau l'ansatz (3.4.23) avec un développement de Taylor de chaque fonction en $\hat{s}_i = 0$, et en regardant les termes en puissance 0 et 1 de ε , nous obtenons les relations suivantes

$$\begin{aligned} P\tilde{U}^0(t) &= 0 \\ P\tilde{U}^1(t) &= \mathcal{K}\Psi^0(t) \end{aligned}$$

qui ne sont autre que (3.4.10-(i)) et (3.4.10-(ii)), en utilisant les informations sur les fonctions \mathcal{W}_i et la proposition 3.4.6.

Conclusion Nous avons $u_i^0 = \tilde{u}_i^0$ et $u_i^1 = \tilde{u}_i^1$.

3.4.2.2 Estimations d'erreur

Nous définissons ici une énergie liée au problème 1D de la manière suivante :

$$\left| \begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, v) &= \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{2} \int_{\varepsilon\sigma_i}^{L_i} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial \hat{s}_i}(t, \hat{s}_i) \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial t}(t, \hat{s}_i) \right|^2 \right) d\hat{s}_i \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} (V^\varepsilon(t))^T \mathcal{J}V^\varepsilon(t) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial V^\varepsilon}{\partial t}(t) \right)^T \mathcal{A} \frac{\partial V^\varepsilon}{\partial t}(t) \end{aligned} \right. \quad (3.4.30)$$

Proposition 3.4.14. *Pour la solution $u^{\varepsilon,1}$ du problème (3.4.2,3.4.22), nous avons $\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1}) = \tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(0, u^{\varepsilon,1})$.*

Démonstration. La dérivée de l'énergie (3.4.30) par rapport au temps nous donne, en utilisant la symétrie des matrices \mathcal{J} et \mathcal{A} :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(\cdot, v)}{\partial t}(t) &= \sum_{i=1}^N \beta_i \int_{\varepsilon\sigma_i}^{L_i} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \hat{s}_i}(t, \hat{s}_i) \frac{\partial v}{\partial \hat{s}_i}(t, \hat{s}_i) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, \hat{s}_i) \frac{\partial v}{\partial t}(t, \hat{s}_i) \right) d\hat{s}_i \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial V^\varepsilon}{\partial t}(t) \right)^T \mathcal{J}V^\varepsilon(t) + \varepsilon \left(\frac{\partial V^\varepsilon}{\partial t}(t) \right)^T \mathcal{A} \frac{\partial^2 V^\varepsilon}{\partial t^2}(t) \end{aligned} \right. \quad (3.4.31)$$

En utilisant la formule d'intégration par parties de Green-Riemann, nous obtenons

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(\cdot, v)}{\partial t}(t) &= \sum_{i=1}^N \beta_i \int_{\varepsilon\sigma_i}^{L_i} \frac{\partial v}{\partial t}(t, \hat{s}_i) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, \hat{s}_i) - \frac{\partial^2 v}{\partial \hat{s}_i^2}(t, \hat{s}_i) \right) d\hat{s}_i \\ &+ \left(\frac{\partial V^\varepsilon}{\partial t}(t) \right)^T \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}V^\varepsilon(t) + \varepsilon \mathcal{A} \frac{\partial^2 V^\varepsilon}{\partial t^2}(t) - \mathcal{B} \partial_S V^\varepsilon(t) \right) \end{aligned} \right. \quad (3.4.32)$$

La fonction $u^{\varepsilon,1}$ est solution de (3.4.2,3.4.22) donc annule les deux lignes de (3.4.32), d'où le résultat. \square

Nous allons maintenant démontrer une estimation d'erreur globale sur le problème 1D. Avant d'écrire les estimations globales et locales, nous allons démontrer deux lemmes techniques, qui serviront dans la démonstration du théorème 3.4.17.

Lemme 3.4.15. Soit $\Psi \in \mathbb{R}^N$. Il existe un unique couple de vecteurs $(\Psi_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{A}}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ tel que

$$\Psi = \mathcal{J}\Psi_{\mathcal{J}} + \mathcal{A}\Psi_{\mathcal{A}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}\Psi_{\mathcal{A}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}\Psi_{\mathcal{J}} = 0 \quad (3.4.33)$$

Démonstration. Nous rappelons ici quelques propriétés sur les matrices \mathcal{J} et \mathcal{A} :

- \mathcal{A} est la matrice définie par (3.4.8). Nous pouvons voir que \mathcal{A} peut se réécrire sous la forme

$$\mathcal{A} = \text{Vol}(\widehat{\mathcal{J}}) (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1})^{-2} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \quad (3.4.34)$$

- $\mathcal{J} = P^T \mathcal{K}^{-1} P$, où P est la matrice donnée par (3.4.13). Il est alors facile de voir que $\text{Ker}(\mathcal{J}) = \text{vect}(\mathbf{1})$ et que $\text{Im}(\mathcal{J}) = (\text{vect}(\mathbf{1}))^\perp$.

Nous allons démontrer ce lemme en séparant la partie existence de la partie unicité :

- **Existence.** Nous décomposons Ψ suivant $\text{vect}(\mathbf{1})$ et son orthogonal :

$$\Psi = \frac{(\Psi, \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} + \left(\Psi - \frac{(\Psi, \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} \right) \quad (3.4.35)$$

Nous cherchons alors $\Psi_{\mathcal{A}}$ sous la forme $\Psi_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{A}} \mathbf{1}$, pour avoir $\mathcal{J}\Psi_{\mathcal{A}} = 0$. Or, en utilisant la décomposition (3.4.35), nous pouvons voir qu'il faut prendre $C_{\mathcal{A}}$ tel que

$$C_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \mathbf{1} = \frac{(\Psi, \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1}$$

ce qui donne par la suite

$$C_{\mathcal{A}} = \text{Vol}(\widehat{\mathcal{J}})^{-1} (\Psi, \mathbf{1}) \quad (3.4.36)$$

Nous avons alors écrit Ψ sous la forme

$$\Psi = \mathcal{A}\Psi_{\mathcal{A}} + \left(\Psi - \frac{(\Psi, \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} \right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}\Psi_{\mathcal{A}} = 0$$

Maintenant, nous remarquons que

$$\left(\left(\Psi - \frac{(\Psi, \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} \right), \mathbf{1} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\Psi - \frac{(\Psi, \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} \right) \in \text{Ker}(\mathcal{J})^\perp = \text{Im}(\mathcal{J})$$

Donc il existe un vecteur $\Psi' \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$\Psi - \frac{(\Psi, \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} = \mathcal{J}\Psi'$$

Posons maintenant

$$\Psi_{\mathcal{J}} = \Psi' - \frac{(\Psi', \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} \quad (3.4.37)$$

Nous gardons toujours

$$\Psi - \frac{(\Psi, \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \mathbf{1} = \mathcal{J}\Psi_{\mathcal{J}}$$

Mais de plus, nous avons $\mathcal{A}\Psi_{\mathcal{J}} = 0$.

- **Unicité.** Supposons qu'il existe deux couples $(\Psi_{\mathcal{A}}, \Psi_{\mathcal{J}})$ et $(\Psi'_{\mathcal{A}}, \Psi'_{\mathcal{J}})$ tels que

$$\begin{aligned}\Psi &= \mathcal{J}\Psi_{\mathcal{J}} + \mathcal{A}\Psi_{\mathcal{A}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}\Psi_{\mathcal{A}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}\Psi_{\mathcal{J}} = 0 \\ \Psi &= \mathcal{J}\Psi'_{\mathcal{J}} + \mathcal{A}\Psi'_{\mathcal{A}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}\Psi'_{\mathcal{A}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}\Psi'_{\mathcal{J}} = 0\end{aligned}$$

En multipliant ces deux lignes par $\Psi'_{\mathcal{J}} - \Psi_{\mathcal{J}}$ et en prenant la différence, nous avons

$$(\Psi'_{\mathcal{J}} - \Psi_{\mathcal{J}})^T \mathcal{J}(\Psi'_{\mathcal{J}} - \Psi_{\mathcal{J}}) = 0 \quad \text{et} \quad (\Psi'_{\mathcal{J}} - \Psi_{\mathcal{J}})^T \mathcal{A}(\Psi'_{\mathcal{J}} - \Psi_{\mathcal{J}}) = 0$$

Nous en déduisons, en utilisant la positivité des matrices \mathcal{A} et \mathcal{J} , que

$$\Psi'_{\mathcal{J}} - \Psi_{\mathcal{J}} \in \text{Ker}(\mathcal{J}) \cap \text{Ker}(\mathcal{A}) = \{0\}$$

Nous en déduisons de la même manière que

$$\Psi'_{\mathcal{A}} - \Psi_{\mathcal{A}} \in \text{Ker}(\mathcal{J}) \cap \text{Ker}(\mathcal{A}) = \{0\}$$

et l'unicité est prouvée. □

Lemme 3.4.16. *Pour toute matrice symétrique positive $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et pour tout couple de vecteurs $(X, Y) \in \mathbb{R}^N$, nous avons*

$$X^T M Y \leq \sqrt{X^T M X} \sqrt{Y^T M Y} \quad (3.4.38)$$

Démonstration. La matrice M est symétrique donc il existe une matrice orthonorale Q et une matrice diagonale telle que

$$M = Q^T D Q$$

Appelons alors $X' = QX$ et $Y' = QY$. Il est alors facile de voir que

$$X^T M Y = (X')^T D Y'$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}(X')^T D Y' &= \sum_{i=1}^N X'_i D_i Y'_i \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N X'_i D_i X'_i \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N Y'_i D_i Y'_i \right)^{1/2}\end{aligned}$$

en utilisant Cauchy-Schwartz, et le fait que la positivité de la matrice M entraîne $D_i \geq 0$. Nous réidentifions cette dernière relation sous forme matricielle, et nous en déduisons (3.4.38). □

Théorème 3.4.17. *Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, et soit $\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon$ la fonction définie par*

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon(t, \hat{s}_i) = \sum_{m=0}^k \varepsilon^m \tilde{u}_i^m(t, \hat{s}_i), \quad t, \hat{s}_i \in \mathbb{R}_+^* \times (\varepsilon\sigma_i, L_i) \quad (3.4.39)$$

Alors il existe une fonction $C_k^\varepsilon(t)$ bornée au voisinage de $\varepsilon = 0$ telle que

$$\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon) \leq \varepsilon^{2k+1} C_k^\varepsilon(t) \quad (3.4.40)$$

Démonstration. Nous pouvons déjà voir que, en utilisant les données de Cauchy, nous avons $\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(0, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon) = 0$ pour ε suffisamment petit. Ensuite, pour estimer $\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)$, nous allons estimer sa dérivée par rapport au temps, en utilisant (3.4.32). Les deux fonctions $u^{\varepsilon,1}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon$ sont solutions de l'équation des ondes sur chaque fente $(\varepsilon\sigma_i, L_i)$, donc leur différence l'est aussi. La fonction $u^{\varepsilon,1}$ satisfait la condition (3.4.22), mais pas la fonction $\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon$. Nous avons alors

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(\cdot, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t) = \left(\frac{\partial (U^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon)}{\partial t}(t) \right)^T \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J} \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) + \varepsilon \mathcal{A} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon}{\partial t^2}(t) - \mathcal{B} \partial_S \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) \right) \quad (3.4.41)$$

Nous utilisons le développement (3.4.39) et nous utilisons (3.4.25) pour voir à partir de quelle puissance de ε les termes ne sont pas compensés. Après calculs, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J} \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) + \varepsilon \mathcal{A} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon}{\partial t^2}(t) - \mathcal{B} \partial_S \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) &= -\varepsilon^k \mathcal{J} \tilde{U}^{k+1}(t) + \sum_{m=k+1}^{\infty} \varepsilon^m \mathcal{J} \sum_{l=0}^k \frac{1}{(m+2-l)!} \mathcal{S}^{m+2-l} \partial_{S^{m+2-l}} \tilde{U}^l(t) \\ &+ \sum_{m=k+1}^{\infty} \varepsilon^m \mathcal{A} \sum_{l=0}^k \frac{1}{(m-l)!} \mathcal{S}^{m-l} \partial_{t^2 S^l} \tilde{U}^l(t) \\ &- \sum_{m=k+1}^{\infty} \varepsilon^m \mathcal{B} \sum_{l=0}^k \frac{1}{(m+1-l)!} \mathcal{S}^{m+1-l} \partial_{S^{m+2-l}} \tilde{U}^l(t) \end{aligned}$$

que nous réécrivons sous la forme

$$\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J} \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) + \varepsilon \mathcal{A} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon}{\partial t^2}(t) - \mathcal{B} \partial_S \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) = -\varepsilon^k \mathcal{J} \tilde{U}^{k+1}(t) - \varepsilon^{k+1} \Psi_k^\varepsilon(t) \quad (3.4.42)$$

où $\Psi_k^\varepsilon(t)$ est un vecteur borné au voisinage de $\varepsilon = 0$. Nous obtenons alors, en utilisant (3.4.42) dans (3.4.41) :

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(\cdot, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t) = \left(\frac{\partial (U^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon)}{\partial t}(t) \right)^T \left(\varepsilon^k \mathcal{J} \tilde{U}^{k+1}(t) + \varepsilon^{k+1} \Psi_k^\varepsilon(t) \right) \quad (3.4.43)$$

En utilisant le lemme 3.4.15, nous décomposons le vecteur $\Psi_k^\varepsilon(t)$ sous la forme

$$\Psi_k^\varepsilon(t) = \mathcal{J} \Psi_{\mathcal{J}}^\varepsilon(t) + \mathcal{A} \Psi_{\mathcal{A}}^\varepsilon(t) \quad (3.4.44)$$

En utilisant cette décomposition, nous pouvons réécrire (3.4.43) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(\cdot, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t) &= \varepsilon^k \left(\frac{\partial (U^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon)}{\partial t}(t) \right)^T \mathcal{J} \left(\tilde{U}^{k+1}(t) + \varepsilon \Psi_{\mathcal{J}}^\varepsilon(t) \right) \\ &+ \varepsilon^{k+1} \left(\frac{\partial (U^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon)}{\partial t}(t) \right)^T \mathcal{A} \Psi_{\mathcal{A}}^\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

Finalement, en intégrant (3.4.45) entre 0 et t nous donne, en utilisant le fait que $\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(0, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon) = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon) &= \int_0^t \varepsilon^k \left(\frac{\partial (U^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon)}{\partial t}(\tau) \right)^T \mathcal{J} \left(\tilde{U}^{k+1}(\tau) + \varepsilon \Psi_{\mathcal{J}}^\varepsilon(\tau) \right) d\tau \\ &+ \int_0^t \varepsilon^{k+1} \left(\frac{\partial (U^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon)}{\partial t}(\tau) \right)^T \mathcal{A} \Psi_{\mathcal{A}}^\varepsilon(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

En utilisant une formule d'intégration de Green-Riemann sur le premier terme du membre de droite de (3.4.46), nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon) &= \varepsilon^k \left(U^{\varepsilon,1}(t) - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) \right)^T \mathcal{J} \left(\tilde{U}^{k+1}(t) + \varepsilon \Psi_{\mathcal{J}}^\varepsilon(t) \right) \\ &- \int_0^t \varepsilon^k \left(U^{\varepsilon,1}(\tau) - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon(\tau) \right)^T \mathcal{J} \left(\frac{\partial \tilde{U}^{k+1}}{\partial t}(\tau) + \varepsilon \frac{\partial \Psi_{\mathcal{J}}^\varepsilon}{\partial t}(\tau) \right) d\tau \\ &+ \int_0^t \varepsilon^{k+1} \left(\frac{\partial (U^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon)}{\partial t}(\tau) \right)^T \mathcal{A} \Psi_{\mathcal{A}}^\varepsilon(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.4.47)$$

En utilisant le lemme 3.4.16 pour les matrices \mathcal{J} et \mathcal{A} , nous avons, pour tout vecteur $V \in \mathbb{R}^N$:

$$\left(U^{\varepsilon,1}(t) - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) \right)^T \mathcal{J} V \leq \varepsilon^{1/2} \sqrt{V^T \mathcal{J} V} \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)} \quad (3.4.48-(i))$$

$$\left(\frac{\partial (U^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{U}}^\varepsilon)}{\partial t}(\tau) \right)^T \mathcal{A} V \leq \varepsilon^{-1/2} \sqrt{V^T \mathcal{A} V} \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)} \quad (3.4.48-(ii))$$

Nous notons alors

$$\begin{aligned} C_1^\varepsilon(t) &= \sqrt{\left(\tilde{U}^{k+1}(t) + \varepsilon \Psi_{\mathcal{J}}^\varepsilon(t) \right)^T \mathcal{J} \left(\tilde{U}^{k+1}(t) + \varepsilon \Psi_{\mathcal{J}}^\varepsilon(t) \right)} \\ C_2^\varepsilon(t) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{U}^{k+1}}{\partial t}(t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi_{\mathcal{J}}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right)^T \mathcal{J} \left(\frac{\partial \tilde{U}^{k+1}}{\partial t}(t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi_{\mathcal{J}}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right)} \\ &+ \sqrt{\left(\Psi_{\mathcal{A}}^\varepsilon(t) \right)^T \mathcal{A} \Psi_{\mathcal{A}}^\varepsilon(t)} \end{aligned}$$

En utilisant alors (3.4.48-(i)) et (3.4.48-(ii)), ainsi que les deux constantes définies ci-dessus, nous obtenons

$$\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon) \leq \varepsilon^{n+1/2} \left(C_1^\varepsilon(t) \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)} + \int_0^t C_2^\varepsilon(\tau) \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(\tau, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)} d\tau \right) \quad (3.4.49)$$

En utilisant une majoration du type $2ab \leq a^2 + b^2$, et en utilisant une version plus générale du lemme 3.3.13, nous avons

$$\tilde{\mathcal{E}}^\varepsilon(t, u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon) \leq \varepsilon^{2n+1} \left(\sup_{\tau \in (0,t)} C_1^\varepsilon(\tau) + \int_0^t C_2^\varepsilon(\tau) d\tau \right) \quad (3.4.50)$$

Nous concluons en remarquant que les constantes C_1^ε et C_2^ε dans (3.4.50) sont bornées au voisinage de $\varepsilon = 0$. \square

Nous avons une amélioration locale du résultat

Théorème 3.4.18. *Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, et soit $\tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon$ la fonction définie par (3.4.39). Alors, pour tout ε tel que $\varepsilon \max \sigma_i \leq \delta$, il existe une fonction \tilde{C}^ε bornée au voisinage de $\varepsilon = 0$*

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_{i,\delta}^\varepsilon} \left| \frac{\partial (u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + |\nabla (u^{\varepsilon,1} - \tilde{\mathbf{u}}_k^\varepsilon)(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \varepsilon^{2n+2} \tilde{C}^\varepsilon \quad (3.4.51)$$

Démonstration. La preuve de ce théorème est similaire à la preuve du théorème 3.3.15. \square

Finalement, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.4.19. *Soit $\delta > 0$. Il existe une fonction $\psi = (\psi_i \in \mathcal{C}^{1,2}(\delta, L_i))_{1 \leq i \leq N}$ ne dépendant pas de ε telle que, pour ε suffisamment petit, nous avons l'estimation*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_{i,\delta}^\varepsilon} \left| \frac{\partial (u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1})}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + |\nabla (u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \varepsilon^4 \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{2} \int_{\varepsilon\sigma_i}^{L_i} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial \hat{s}_i}(t, \hat{s}_i) \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \hat{s}_i) \right|^2 \right) d\hat{s}_i + O(\varepsilon^6) \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

Démonstration. Nous utilisons les théorèmes 3.3.15 et 3.4.18 pour $k = 2$, en introduisant les fonctions *ad hoc* \mathbf{u}_2^ε et $\tilde{\mathbf{u}}_2^\varepsilon$. Nous décomposons $u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}$ sous la forme

$$u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1} = (u^\varepsilon - \mathbf{u}_2^\varepsilon) + (\mathbf{u}_2^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_2^\varepsilon) + (\tilde{\mathbf{u}}_2^\varepsilon - u^{\varepsilon,1})$$

ou encore

$$(u^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}) - (\mathbf{u}_2^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_2^\varepsilon) = (u^\varepsilon - \mathbf{u}_2^\varepsilon) + (\tilde{\mathbf{u}}_2^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}) \quad (3.4.53)$$

et nous faisons les majorations suivantes

- la majoration du terme $u^\varepsilon - \mathbf{u}_2^\varepsilon$ se fait en utilisant le théorème 3.3.15,
- la majoration du terme $\tilde{\mathbf{u}}_2^\varepsilon - u^{\varepsilon,1}$ se fait en utilisant le théorème 3.4.18

Le membre de droite de (3.4.53) est en $O(\varepsilon^6)$. Pour conclure, nous utilisons la conclusion de la partie 3.4.2.1, et nous appelons $\psi_i = u_i^2 - \tilde{u}_i^2$. \square

Résultats numériques

Résumé

Dans ce chapitre, nous implémentons les problèmes 1D avec conditions de Kirchhoff améliorés (2.4.2, 2.4.10) pour le cas harmonique avec une jonction de deux fentes, (3.4.2, 3.4.22) pour le cas temporel avec une jonction de N fentes. Ces deux problèmes font intervenir la résolution de problèmes de Laplace avec opérateurs DtN dont nous détaillons la résolution numérique dans la section 4.1. Dans la section 4.2, nous détaillons la résolution numérique du problème (2.4.2, 2.4.10), et nous montrons numériquement l'erreur d'estimation du théorème 2.4.8. Dans la section 4.3, nous regardons le problème temporel obtenu à partir du problème (2.4.2, 2.4.10) (en remplaçant $-\omega$ par une dérivation par rapport au temps), et nous montrons numériquement que nous avons une équivalence de l'erreur d'estimation du théorème 2.4.8. Enfin, dans la section 4.4, nous détaillons la résolution numérique du problème (3.4.2, 3.4.22), et nous montrons numériquement l'estimation d'erreur du théorème 3.4.19.

Sommaire

4.1	Résolution numérique des problèmes de Laplace avec DtN	95
4.1.1	Rappel du problème continu et troncature de l'opérateur T_+	95
4.1.2	Discrétisation du problème tronqué	97
4.1.3	Implémentation en MATLAB et résultats numériques	99
4.2	Cas d'une jonction de deux fentes	102
4.2.1	Résolution numérique	104
4.2.2	Estimations d'erreurs	106
4.3	Cas d'une jonction de deux fentes (modèle temporel)	107
4.3.1	Étude de la stabilité numérique du schéma	108
4.3.2	Estimations d'erreur	110
4.4	Cas d'une jonction de N fentes	111
4.4.1	Méthode de calcul des matrices \mathcal{J} et \mathcal{A}	111
4.4.2	Schéma numérique	115

4.1 Résolution numérique des problèmes de Laplace avec DtN

4.1.1 Rappel du problème continu et troncature de l'opérateur T_+

Nous rappelons ici le problème sur Φ_α : trouver $\Phi_\alpha \in H^1(\hat{\mathbf{J}})$ (avec $\hat{\mathbf{J}}$ donné par la figure 2.7 page 49) tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial \tilde{X}^2} + \tan(\alpha)^2 \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial \tilde{Y}^2} = 0 \quad \text{dans } \hat{\mathbf{J}} \\ \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial X} + \tan(\alpha) T_+ \Phi_\alpha = 1 \quad \text{sur } \hat{\Sigma}^+ \\ \Phi_\alpha = 0 \quad \text{sur } \hat{\Sigma}^0 \\ \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial Y} = 0 \quad \text{sur } \hat{\Sigma}^Y \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

et la formulation variationnelle associée : trouver $\Phi_\alpha \in H^1(\hat{\mathbf{J}})$ tel que, pour tout $\Psi \in H^1(\hat{\mathbf{J}})$,

$$\int_{\hat{\mathbf{J}}} \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \tilde{X}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}} + \tan^2(\alpha) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{Y}} \right) + \tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Psi T_+ \Phi_\alpha = \int_{\hat{\Sigma}^+} \Psi \quad (4.1.2)$$

En utilisant la formulation variationnelle associée donnée par (2.4.40), et en utilisant la trace donnée par (2.4.41), nous avons

$$\frac{K(\alpha)}{\tan(\alpha)} = 2 \left(\int_{\hat{\mathbf{J}}} \left(\left| \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \tilde{X}} \right|^2 + \tan(\alpha)^2 \left| \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \tilde{Y}} \right|^2 \right) + \tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Phi_\alpha T_+ \Phi_\alpha \right) \quad (4.1.3)$$

En reprenant la définition A.1.1 de l'opérateur T_+ donnée en annexe, l'implémentation numérique de cet opérateur va nécessiter une troncature de la somme. Nous devons nous assurer que la solution du problème avec l'opérateur tronqué converge vers la solution du problème exacte quand le nombre de termes considérés tend vers l'infini.

Soit $P \in \mathbb{N}$. Nous donnons la définition de l'opérateur tronqué T_+^P par

$$T_+^P v = \sum_{p=0}^P p \pi(v, w_p)_0 w_p \quad (4.1.4)$$

et nous recherchons la solution $\Phi_\alpha^P \in H^1(\hat{\mathbf{J}})$ du problème variationnel suivant : trouver $\Phi_\alpha^P \in H^1(\hat{\mathbf{J}})$ tel que, pour tout $\Psi \in H^1(\hat{\mathbf{J}})$,

$$\int_{\hat{\mathbf{J}}} \left(\frac{\partial \Phi_\alpha^P}{\partial \tilde{X}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}} + \tan^2(\alpha) \frac{\partial \Phi_\alpha^P}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{Y}} \right) + \tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Psi T_+^P \Phi_\alpha^P = \int_{\hat{\Sigma}^+} \Psi \quad (4.1.5)$$

Proposition 4.1.1. *Le problème (4.1.5) est bien posé.*

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à la preuve de la proposition 2.4.11. La seule différence est que la partie "continuité" est plus facile à démontrer puisque T_+^P est un opérateur fini. \square

Proposition 4.1.2. *Nous avons le résultat de convergence suivant :*

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \|\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P\|_{H^1(\hat{\mathbf{J}})} = 0$$

Démonstration. Nous prenons la différence entre les formulations variationnelles (4.1.2) et (4.1.5)

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\mathbf{J}}} \left(\frac{\partial(\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P)}{\partial \tilde{X}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{X}} + \tan^2(\alpha) \frac{\partial(\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P)}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ & + \tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Psi T_+^P (\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P) = \tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}^+} \Psi (T_+^P - T_+) \Phi_\alpha \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Dans l'égalité (4.1.6), nous prenons la fonction test $\Psi = \Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P$. En utilisant la positivité de l'opérateur T_+^P et l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, nous avons la minoration

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{\mathbf{J}}} \left(\left| \frac{\partial(\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P)}{\partial \tilde{X}} \right|^2 + \tan^2(\alpha) \left| \frac{\partial(\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P)}{\partial \tilde{Y}} \right|^2 \right) \\ & + \tan(\alpha) \int_{\widehat{\Sigma}^+} (\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P) T_+^P (\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P) \geq C \|\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P\|_{\mathbf{H}^1(\widehat{\mathbf{J}})}^2 \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Le terme de droite devient

$$\tan(\alpha) \int_{\widehat{\Sigma}^+} (\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P) (T_+^P - T_+) \Phi_\alpha = - \sum_{p>P} p\pi (\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P, w_p)_0 (\Phi_\alpha, w_p)_0 \quad (4.1.8)$$

Nous majorons ce terme en utilisant Cauchy-Schwartz, et nous majorons la somme sur $p > P$ pour le terme $\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P$ par la somme pour $p \in \mathbb{N}$. Nous obtenons alors :

$$\tan(\alpha) \int_{\widehat{\Sigma}^+} (\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P) (T_+^P - T_+) \Phi_\alpha \leq \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} p\pi |(\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P, w_p)_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p>P} p\pi |(\Phi_\alpha, w_p)_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.9)$$

En utilisant un argument de continuité (énoncé dans l'annexe A.1 sous la forme de la proposition A.1.3) avec un argument de trace, nous pouvons majorer le premier terme par $\|\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P\|_{\mathbf{H}^1(\widehat{\mathbf{J}})}$. En combinant ce résultat avec (4.1.7), nous avons

$$\|\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P\|_{\mathbf{H}^1(\widehat{\mathbf{J}})}^2 \leq C \|\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^P\|_{\mathbf{H}^1(\widehat{\mathbf{J}})} \left(\sum_{p>P} p\pi |(\Phi_\alpha, w_p)_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.10)$$

Puisque la fonction Φ_α est dans $\mathbf{H}^1(\widehat{\mathbf{J}})$, elle est dans l'espace $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Sigma}^+)$, donc

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p>P} p\pi |(\Phi_\alpha, w_p)_0|^2 \leq \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p>P} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \pi |(\Phi_\alpha, w_p)_0|^2 = 0 \quad (4.1.11)$$

La combinaison de (4.1.10) et de (4.1.11) nous donne le résultat désiré. \square

4.1.2 Discrétisation du problème tronqué

Soit $P \in \mathbb{N}$ fixé. Nous discrétisons le problème (4.1.5) sur une triangulation \mathcal{T}_h , où h sera un paramètre de notre discrétisation amené à tendre vers 0 - dans notre cas, h sera l'aire du plus grand triangle de notre discrétisation ; et nous notons $\mathbb{P}_h^1(\widehat{\mathbf{J}})$ le sous-espace des fonctions continues qui sont dans $\mathbf{H}_0^1(\widehat{\mathbf{J}})$ telles que la restriction de ces fonctions à tout triangle de la triangulation soit un polynôme de degré 1. Il y a donc N_{ddl} fonctions de bases de cet espace, que nous noterons $(\varphi_i^h)_{1 \leq i \leq N_{\text{ddl}}}$. Nous noterons également φ^h le vecteur de $(\mathbb{P}_h^1(\widehat{\mathbf{J}}))^{N_{\text{ddl}}}$ formé par les φ_i^h .

Pour toute fonction $v \in \mathbb{P}_h^1(\widehat{\mathbf{J}})$, nous notons v^h le vecteur de $\mathbb{R}^{N_{\text{ddl}}}$ tel que

$$\forall \widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbf{J}}, \quad v(\widehat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{ddl}}} v_i^h \varphi_i^h(\widehat{\mathbf{x}}) = (v^h)^T \varphi^h(\widehat{\mathbf{x}}) \quad (4.1.12)$$

Nous notons enfin les matrices M^h , $R_{\hat{X}}^h$ et $R_{\hat{Y}}^h$ définies dans $\mathcal{M}_{N_{\text{ddl}}}(\mathbb{R})$ par

$$M^k = \int_{\hat{\mathbf{J}}} \varphi^h(\hat{\mathbf{x}}) (\varphi^h)^T(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \quad (4.1.13-(i))$$

$$R_{\hat{X}}^k = \int_{\hat{\mathbf{J}}} \frac{\partial \varphi^h}{\partial \hat{X}}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\frac{\partial \varphi^h}{\partial \hat{X}} \right)^T(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \quad (4.1.13-(ii))$$

$$R_{\hat{Y}}^k = \int_{\hat{\mathbf{J}}} \frac{\partial \varphi^h}{\partial \hat{Y}}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\frac{\partial \varphi^h}{\partial \hat{Y}} \right)^T(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \quad (4.1.13-(iii))$$

Nous considérons l'interpolation de la fonction Φ_α^P sur l'espace $\mathbb{P}_h^1(\hat{\mathbf{J}})$, et nous appelons $\Phi_\alpha^{P,h}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{N_{\text{ddl}}}$ ainsi obtenu. Nous rappelons la formulation variationnelle (2.4.40) : En notant de la même manière Ψ^h pour Ψ , (4.1.2) devient :

$$(\Phi_\alpha^{P,h})^T R_{\hat{X}}^h \Psi^h + \tan^2(\alpha) (\Phi_\alpha^h)^T R_{\hat{Y}}^h \Psi^h + \tan(\alpha) \int_{\hat{\Sigma}_+} \Psi T_+^P \Phi_\alpha^P = \int_{\hat{\Sigma}_+} \Psi \quad (4.1.14)$$

Pour finir la discrétisation, il nous suffit de savoir calculer les intégrales du type

$$\int_{\hat{\Sigma}_+} v \Psi$$

Appelons B_+^h la matrice symétrique de $\mathcal{M}_{N_{\text{ddl}}}(\mathbb{R})$ telle que, pour toutes fonctions $(v, \Psi) \in \mathbb{P}_h^1(\hat{\mathbf{J}})$,

$$\int_{\hat{\Sigma}_+} v \Psi = (v^h)^T B_+^h \Psi^h \quad (4.1.15)$$

Nous avons donc

$$\int_{\hat{\Sigma}_+} \Psi T_+^P \Phi_\alpha^P = \sum_{p=0}^P p\pi \left((\Phi_\alpha^{P,h})^T B_+^h w_p^h \right) \left(\Psi^T B_+^h w_p^h \right) = \sum_{p=0}^P (\Phi_\alpha^{P,h})^T W_p^h \Psi^h \quad (4.1.16)$$

en notant

$$W_p^h = B_+^h w_p^h (w_p^h)^T B_+^h \quad (4.1.17)$$

Finalement, le problème (4.1.14) se ramène au problème suivant (où $\mathbf{1}^h$ est la projection sur $\mathbb{P}_h^1(\hat{\mathbf{J}})$ de la fonction constante égale à 1)

$$(\Phi_\alpha^{P,h})^T \left(R_{\hat{X}}^h + \tan^2(\alpha) R_{\hat{Y}}^h + \tan(\alpha) \sum_{p=0}^P p\pi W_p^h \right) \Psi^h = (\mathbf{1}^h)^T B_+^h \Psi^h \quad (4.1.18)$$

Finalement, la formulation discrétisée du problème (4.1.5) est : trouver $\Phi_\alpha^{P,h} \in \mathbb{R}^{N_{\text{ddl}}}$ tel que $\Phi_\alpha^{P,h} = 0$ aux points de discrétisation associés à la condition de Dirichlet et

$$\mathcal{R}^h \Phi_\alpha^{P,h} := \left(\Phi_\alpha^{P,h} R_{\hat{X}}^h + \tan^2(\alpha) R_{\hat{Y}}^h + \tan(\alpha) \sum_{p=0}^P p\pi W_p^h \right) \Phi_\alpha^{P,h} = B_+^h \mathbf{1}^h \quad (4.1.19)$$

Nous calculons alors $K^{P,h}(\alpha)$ de la manière suivante (qui est la version tronquée et discrétisée de (4.1.3)) :

$$K^{P,h}(\alpha) = 2 \tan(\alpha) (\Phi_\alpha^{P,h})^T \mathcal{R}^h \Phi_\alpha^{P,h} \quad (4.1.20)$$

En utilisant la relation (4.1.19), nous pouvons aussi calculer $K(\alpha)$ par la relation

$$K^{P,h}(\alpha) = 2 \tan(\alpha) (\Phi_\alpha^{P,h})^T B_+^h \mathbf{1}^h \quad (4.1.21)$$

4.1.3 Implémentation en MATLAB et résultats numériques

Nous résolvons numériquement (4.1.19) par un algorithme de gradient conjugué. Le fait de choisir ce type de méthode pour la résolution est dû au coût prohibitif de la pseudo-inversion de la matrice \mathcal{R}^h - cette matrice contient un bloc plein dont la taille correspond au nombre de points de discrétisation sur $\widehat{\Sigma}^+$. Nous parlons ici de pseudo-inversion car de plus \mathcal{R}^h n'est pas inversible (le vecteur $\mathbb{1}^h$ appartient au noyau).

L'algorithme de résolution est donné par le programme suivant, écrit en matlab et utilisant la bibliothèque d'éléments finis EF3¹ [AT].

```
function K = compute_K_alpha(angle_in_degrees)

% First part - construction of Mesh such that area of each triangle
% is lesser than 0.00005
J_geom.points = [0. 0. ; -1. -1. ; 0. -1.];
J_geom.segments = [1 2 ; 2 3 ; 3 1];
J_geom.lab_segments = [1; 2; 3];
J_mesh=triangle(J_geom,0.00005);

% Second part - retrieve informations for P1 formulation using
% function mef of EF3 ToolBox and build matrices and right member
[~, ddl, ~, lblddl, Diag, ~, UX, UY, ~, ~, ~, ~] = mef(J_mesh, 1, 2);
alpha = pi * angle_in_degrees / 180;
tg_alpha = tan(alpha);
Rigidity = UX' * Diag * UX + tg_alpha * tg_alpha * UY' * Diag * UY;
Rhs = Mass * zeros(size(ddl(:,1)));

% Third part - construct truncated operator T^20 and
% associated right member
[Operator_T, Rhs_T] = buildDtN(J_mesh, 3, [0;1;0], 20, 1, 1, 2);
Rigidity = Rigidity + tg_alpha * Operator_T;
Rhs = Rhs + Rhs_T;

% Fourth part - solve system using a conjugate gradient algorithm
Guess = zeros(size(Rhs));
Dirichlet_Boundary = find(lblddl==1);
u = cg_dir(Rigidity , Guess, Rhs, 1e-16, 1000, Dirichlet_Boundary);

% Last part - compute K(alpha)
K = 2 * tg_alpha * u' * Rhs;
end
```

Ce programme part de la géométrie donnée dans la figure 4.1 et construit un maillage de Delaunay (en utilisant le mailleur triangle écrit par J. R. Shewchuk [She96]) tel que l'aire de chaque triangle soit inférieure à 0.0005 (le maillage obtenu pour une aire inférieure à 0.001 est donné par la figure 4.2).

1. <http://www.cmap.polytechnique.fr/~alouges/logiciels.php>

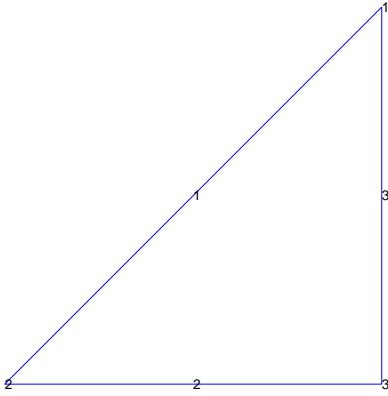


FIGURE 4.1 – Numérotation de la géométrie

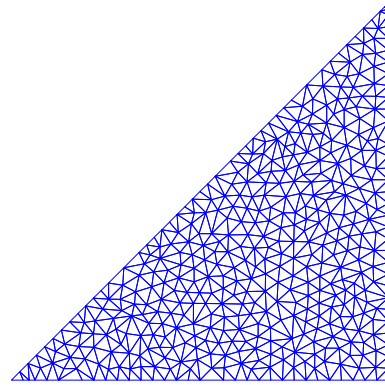


FIGURE 4.2 – Maillage obtenu

Sur ce maillage, nous appelons la fonction `mef` afin d'obtenir les quantités suivantes (en utilisant `~` pour ne pas stocker les paramètres de retour inutiles) :

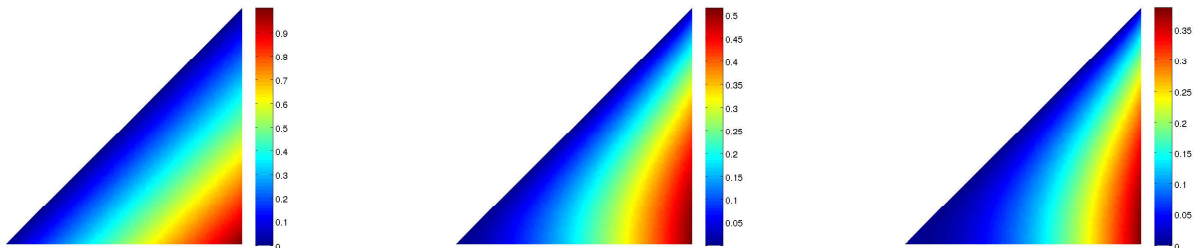
- `ddl` est une matrice de taille $N_{ddl} \times 3$ contenant les coordonnées des degrés de liberté,
- `lblddl` est un vecteur de taille N_{ddl} contenant les labels associés aux degrés de liberté. Pour les points intérieurs, ce label est égal à 0. Pour les points se trouvant sur le bord, le label est donné par la figure 4.1.
- `Diag` est une matrice diagonale de taille N_{int_pts} qui contient les poids des points d'intégration (le nombre N_{int_pts} est égal à 3 fois le nombre de triangles du maillage, puisque nous faisons des éléments \mathbb{P}^1 de Lagrange en dimension 2)
- `Ux` et `Uy` sont des matrices de taille $N_{int_pts} \times N_{ddl}$ et qui contiennent respectivement les valeurs des dérivées suivant x des fonctions de base et les dérivées suivant y des fonctions de bases sur les points d'intégration.

Nous avons donc

$$R_{\tilde{X}}^h = UX^T \text{Diag} UX \quad \text{et} \quad R_{\tilde{Y}}^h = UY^T \text{Diag} UY \quad (4.1.22)$$

Nous construisons ensuite la matrice W_P^h et le second membre de (4.1.19) en utilisant la fonction `buildDtN`, et nous incluons les deux contributions respectivement dans `Rigidity` et `Rhs`.

Finalement, nous résolvons (4.1.19) en utilisant la fonction `cg_dir`, et nous calculons $K^{P,h}(\alpha)$ en utilisant (4.1.21).

FIGURE 4.3 – Tracé de la solution obtenue pour $\alpha = 0$ (gauche), $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (milieu) et $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (droite)

Afin de vérifier la validité du code numérique, nous avons comparé le calcul de la solution approchée ci-dessus avec le calcul d'une solution approchée obtenue par le code suivant, écrit en FREEFEM++²

```
// Nombre de points par unite de longueur et nombre de modes pour
// l'operateur tronque DtN
int N=20;
int Pmax=30;

// Angle de la jonction
real angle=45;
real tgalpha=tan(angle*pi/180);

// Jeu de couleurs
real[int] colorhsv = [
8./12., 0., 1., 8./12., 1., 1., 7./12., 1., 1., 6./12., 1., 1.,
5./12., 1., 1., 4./12., 1., 1., 3./12., 1., 1., 2./12., 1., 1.,
1./12., 1., 1., 0., 1., 1., 0., 0., 0.];

// Construction et affichage du maillage
border Neumann(t=0,1){x=t; y=0; label=2;};
border Dirichlet(t=0,1){x=1-t; y=1-t; label=1;};
border DTN(t=0,1){x=1; y=t; label=3; };
mesh Domain=buildmesh( Dirichlet(sqrt(2)*N) + Neumann(N) + DTN(N) );
plot(Domain);

// Definition des espaces fonctionnels et de la matrice du Laplacien scalee
fespace Hone(Domain,P1);
varf a(u,v)=int2d(Domain)(dx(u)*dx(v)+tgalpha*tgalpha*dy(u)*dy(v))+on(1,u=0);
matrix<real> A=a(Hone,Hone);
cout << "Matrice_du_Laplacien_scalee_construite_-_sa_taille_est_"
<< A.n << endl;

// Construction de l'operateur tronque DtN
for (int p=1; p <= Pmax; p++)
{
func g = cos(p*pi*y);
varf ell(u,v) = int1d(Domain,3)(g*v)+on(1,u=0);
real[int] wp = ell(0,Hone);

int NumberElementsOnEdge=0;
real[int] NonZerosElements(1);
for(int j=0; j < A.n; j++)
{
if ( wp(j) != 0 )
{
NumberElementsOnEdge++;
NonZerosElements.resize(NumberElementsOnEdge);
NonZerosElements(NumberElementsOnEdge-1)=j;
}
}
}
}
```

2. <http://www.freefem.org/ff++/>

```

int [int] DtnI (NumberElementsOnEdge*NumberElementsOnEdge) ,
           DtnJ (NumberElementsOnEdge*NumberElementsOnEdge) ;
real [int] DtnValues (NumberElementsOnEdge*NumberElementsOnEdge) ;

for (int j=0; j < NumberElementsOnEdge; j++)
{
  for (int k=0; k < NumberElementsOnEdge; k++)
  {
    DtnI (NumberElementsOnEdge*j+k)=NonZerosElements (j) ;
    DtnJ (NumberElementsOnEdge*j+k)=NonZerosElements (k) ;
    DtnValues (NumberElementsOnEdge*j+k)=p*pi
                                           *wp (NonZerosElements (j))
                                           *wp (NonZerosElements (k)) ;
  }
}

matrix MatrixDtn=[DtnI, DtnJ, DtnValues] ;
A = A + MatrixDtn ;
cout << "Ajout du mode_" << p << "_de_l'operateur_DtN" << endl ;
}

// Construction du second membre et du vecteur associe
varf rhs (u,v) = int1d (Domain,3) (v)+on (1,u=0) ;
real [int] RHS = rhs (0,Hone) ;

// Resolution et trace de la solution
set (A, solver=UMFPACK) ;
Hone Phialpha ;
Phialpha [] = A^-1 * RHS ;
plot (Phialpha, fill=true, hsv=colorhsv, ps="sol.eps", boundary=false) ;

```

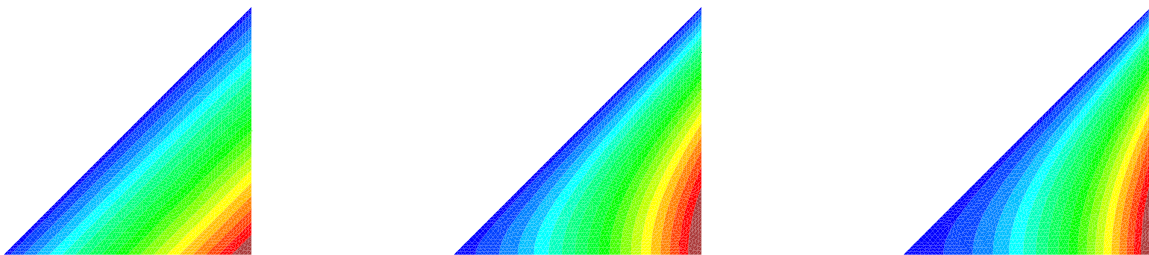


FIGURE 4.4 – Tracé de la solution obtenue pour $\alpha = 0$ (gauche), $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (milieu) et $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (droite)

Bien que les jeux de couleurs ne soient pas les mêmes, les solutions obtenues par notre code MATLAB (figure 4.3) et les solutions obtenues par notre code FREEFEM++ (figure 4.4) sont les mêmes.

4.2 Cas d'une jonction de deux fentes

Nous rappelons ici le problème défini par (2.4.2) et (2.4.10), sous forme variationnelle : trouver $u^{\varepsilon,1} \in H^1(S_{\pm})$ telle que

$$\int_{S_{\pm}} \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}} \frac{\partial v}{\partial \hat{s}} - \omega^2 u^{\varepsilon,1} v \right) - \omega u^{\varepsilon,1} (\pm L_{\pm}) v (\pm L_{\pm}) + \frac{1}{\varepsilon K(\alpha)} [u^{\varepsilon,1}] [v] - \varepsilon \omega^2 \tan(\alpha) \langle u^{\varepsilon,1} \rangle \langle v \rangle = \int_{S_{\pm}} \mathbf{f} v \quad (4.2.1)$$

Nous discrétisons le problème (4.2.1) par des éléments finis \mathbb{P}^1 de Lagrange avec condensation de masse décrits dans [CJT94]. Nous appelons h le pas de discrétisation en espace commun à S_- et S_+ , et nous supposons que $N_{\pm} = L_{\pm}/h$ est entier. Nous discrétisons chaque segment S_{\pm} en $N_{\pm} + 1$ points. Nous notons alors $(x_m)_{1 \leq m \leq N_- + N_+ + 2}$ les points définis par

$$x_m = \begin{cases} h(m - N_- - 1), & 1 \leq m \leq N_- + 1, \\ h(m - N_- - 2), & N_- + 2 \leq m \leq N_- + N_+ + 2 \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que $x_{N_- + 1} = x_{N_- + 2} = 0$. Nous donnons ici les matrices de rigidité \mathcal{K}_h et de masse \mathcal{M}_h obtenues :

- la matrice de rigidité \mathcal{K}_h est égale à

$$\mathcal{K}_h = \begin{pmatrix} K_{h,N_-+1} & 0 \\ 0 & K_{h,N_++1} \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

où $K_{h,\mathbf{N}}$ est la matrice carrée de taille $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ donnée par

$$K_{h,\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

- la matrice de rigidité \mathcal{M}_h est égale à

$$\mathcal{M}_h = \begin{pmatrix} M_{h,N_-+1} & 0 \\ 0 & M_{h,N_++1} \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

où $M_{h,\mathbf{N}}$ est la matrice carrée de taille $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ donnée par

$$M_{h,\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & h & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{h}{2} \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

Nous notons également \mathcal{O}_h la matrice correspondant à la condition d'onde sortante : il s'agit d'une matrice de taille $(M_- + M_+ + 2) \times (M_- + M_+ + 2)$ nulle partout sauf aux coefficients

$$(\mathcal{O}_h)_{1,1} = (\mathcal{O}_h)_{M_- + M_+ + 2, M_- + M_+ + 2} = 1 \quad (4.2.6)$$

Enfin, nous notons \mathcal{J}_h et \mathcal{A}_h les matrices correspondant aux conditions de saut et de moyenne : il s'agit de matrices de taille $(M_- + M_+ + 2) \times (M_- + M_+ + 2)$ nulles partout sauf aux coefficients

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_h)_{N_-+1, N_-+1} &= (\mathcal{J}_h)_{N_-+2, N_-+2} = (K(\alpha))^{-1} \\ (\mathcal{J}_h)_{N_-+1, N_-+2} &= (\mathcal{J}_h)_{N_-+2, N_-+1} = -(K(\alpha))^{-1} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

et

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_h)_{N_-+1, N_-+1} &= (\mathcal{A}_h)_{N_-+2, N_-+2} = \frac{\tan(\alpha)}{4} \\ (\mathcal{A}_h)_{N_-+1, N_-+2} &= (\mathcal{A}_h)_{N_-+2, N_-+1} = \frac{\tan(\alpha)}{4} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Remarque 4.2.1. Nous pouvons voir que les sous matrices des lignes $N_- + 1$ à $N_- + 2$ et des colonnes $N_- + 1$ à $N_- + 2$ des matrices \mathcal{J}_h et \mathcal{A}_h sont exactement les matrices de saut et de moyenne \mathcal{J} et \mathcal{A} du chapitre 3.

En introduisant $U_h^{\varepsilon,1}$ (respectivement V_h) le vecteur de $\mathbb{C}^{N_-+N_++2}$ correspondant à la valeur de $u^{\varepsilon,1}$ (respectivement v) sur les points d'interpolation (x_m) , la formulation variationnelle (4.2.1) devient : trouver $U_h^{\varepsilon,1} \in \mathbb{C}^{N_-+N_++2}$ tel que, pour tout $V_h \in \mathbb{C}^{N_-+N_++2}$,

$$V_h^T \left(\mathcal{K}_h - \omega^2 \mathcal{M}_h - i\omega \mathcal{O}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h - \varepsilon \omega^2 \mathcal{A}_h \right) U_h^{\varepsilon,1} = V_h^T \mathcal{M}_h \mathbf{F}_h \quad (4.2.9)$$

ce qui revient au problème

$$\left(\mathcal{K}_h - \omega^2 \mathcal{M}_h - i\omega \mathcal{O}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h - \varepsilon \omega^2 \mathcal{A}_h \right) U_h^{\varepsilon,1} = \mathcal{M}_h \mathbf{F}_h \quad (4.2.10)$$

où \mathbf{F}_h est le vecteur de $\mathbb{C}^{N_-+N_++2}$ correspondant à la valeur de \mathbf{f} sur les points d'interpolation (x_m) .

4.2.1 Résolution numérique

Nous avons pris comme fonction test

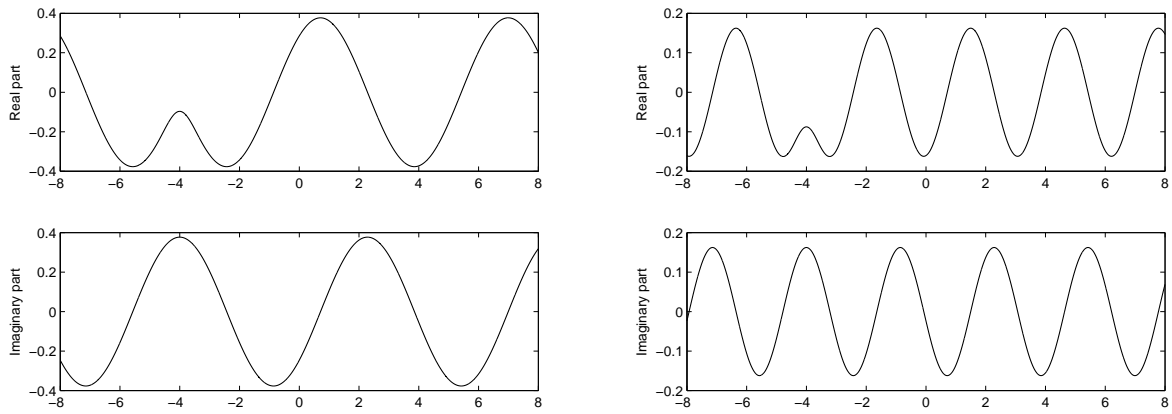
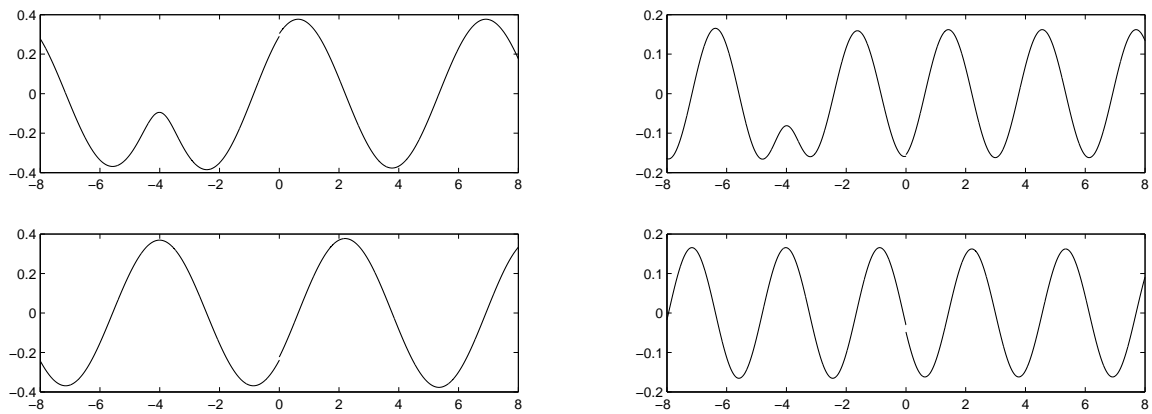
$$\mathbf{f}(\hat{s}) = \exp \left(-5 \left(\hat{s} + \frac{L}{2} \right)^2 \right) \quad (4.2.11)$$

Nous avons tout d'abord fait une résolution du problème limite sous MATLAB avec cette condition initiale, pour différentes valeurs de paramètres ω et h . La résolution est faite en utilisant les algorithmes ZGBTRF et ZGBTRS de la bibliothèque LAPACK³, utilisés automatiquement par MATLAB car la matrice creuse que nous voulons "inverser" est à valeurs complexes. Nous représentons sur la figure 4.5 la solution obtenue pour différentes valeurs de ω .

Nous avons ensuite fait une résolution du problème (4.2.10) pour $\varepsilon = 10^{-1}$ pour les mêmes jeux de paramètres (ω, h) , avec le même second membre, et en résolvant de la même manière. Nous obtenons les résultats suivants, visible sur la figure 4.6.

Nous voyons que le comportement de la solution sur la figure 4.6 est similaire au comportement de la solution sur la figure 4.5, exception faite de ce qu'il se passe en $\hat{s} = 0$.

3. <http://www.netlib.org/lapack/>

FIGURE 4.5 – Solution limite obtenue pour $\omega = 1$ (gauche) et $\omega = 2$ (droit)FIGURE 4.6 – Solution du problème (4.2.10) obtenue pour $\omega = 1$ (gauche) et $\omega = 2$ (droit)

4.2.2 Estimations d'erreurs

Pour la solution du problème exact, nous résolvons le problème anisotrope posé sur le domaine canonique $\widehat{\Omega}_\alpha$ avec des éléments finis d'ordre élevés en utilisant le code MONTJOIE⁴ (afin d'avoir un maillage indépendant de ε). Cependant, nous nous limitons pour la résolution à $\varepsilon \geq 10^{-4}$ (à pas d'espace fixé, si nous prenons ε plus petit que le pas d'espace, l'erreur prépondérante est l'erreur numérique).

Nous interpolons ensuite la solution du problème limite et la solution du problème approché sur ce maillage, et nous calculons la norme L^2 de la différence sur les domaines $\widehat{\Omega}_\pm^\delta$, afin de nous placer dans le cadre du théorème 2.4.8.

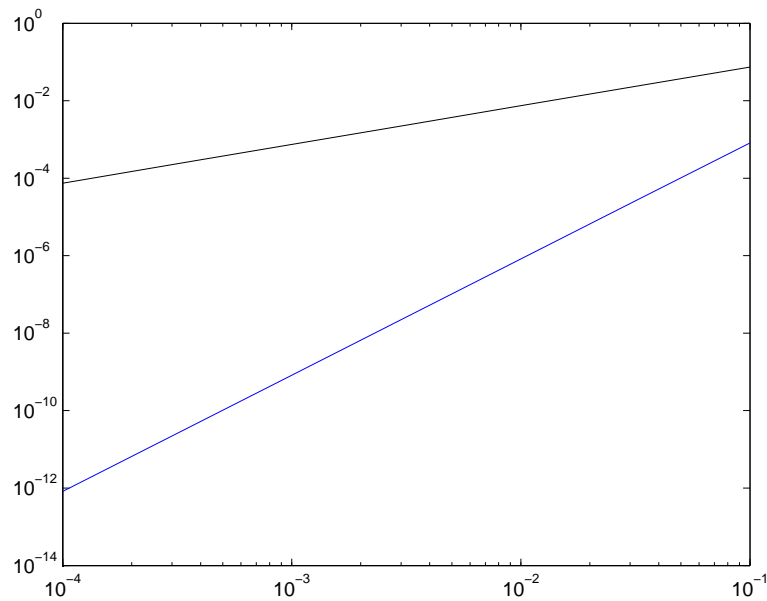


FIGURE 4.7 – Erreur L^2 entre la solution du problème exact et les solutions des différents problèmes 1D (en noir pour le problème d'ordre 0 en ε , en bleu pour le problème d'ordre 1) par rapport à ε .

Remarque 4.2.2. Nous pouvons voir que l'erreur entre la solution du problème exacte et la solution du problème (4.2.1) est en ε^3 , alors que le théorème 2.4.8 nous donne une estimation en ε^2 . En fait, si nous reprenons la démonstration de ce théorème, tout laisse penser que $u_2^\varepsilon = \widetilde{u}_2^\varepsilon$. Nous savons déjà que $u_1^\varepsilon = \widetilde{u}_1^\varepsilon$. Il nous reste à démontrer les égalités entre u_\pm^2 et \widetilde{u}_\pm^2 , ce qui revient à montrer (en utilisant le résultat d'unicité du lemme 2.3.4) :

$$[u^2] = \frac{1}{\omega} K(\alpha) \left\langle \frac{\partial u^1}{\partial \hat{s}} \right\rangle \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial u^2}{\partial \hat{s}} \right] = -\omega \tan(\alpha) \langle u^1 \rangle \quad (4.2.12)$$

Pour démontrer l'égalité de droite de (4.2.12), nous utilisons la décomposition suivante de la fonction U^1 , en utilisant (2.3.18) et le problème (2.4.32) satisfait par \mathcal{W}_α :

$$U^1 = \langle u^1 \rangle - \frac{1}{\omega} \left\langle \frac{\partial u^0}{\partial \hat{s}} \right\rangle \mathcal{W}_\alpha$$

4. <http://montjoie.gforge.inria.fr/index.php>

Nous utilisons alors la relation (2.3.15) pour $k = 2$, et nous utilisons le fait que \mathcal{W}_α est à moyenne nulle pour écrire

$$\left[\frac{\partial u^2}{\partial \hat{s}} \right] = -\omega \tan(\alpha) \langle u^1 \rangle$$

Pour démontrer le membre de gauche de (4.2.12), nous partons de la relation (2.3.17) pour $k = 2$:

$$[u^2] = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial u^1_+}{\partial \hat{s}} \int_{\Sigma_\alpha^+} \mathcal{W}_\alpha - \frac{\partial u^1_-}{\partial \hat{s}} \int_{\Sigma_\alpha^-} \mathcal{W}_\alpha \right) + \int_{\hat{J}_\alpha} U^0 \mathcal{W}_\alpha$$

Nous utilisons le fait que \mathcal{W}_α est à moyenne nulle, et nous utilisons le corollaire 2.4.10 pour réécrire cette relation sous la forme

$$[u^2] = \frac{K(\alpha)}{2\omega} \left(\frac{\partial u^1_+}{\partial \hat{s}} + \frac{\partial u^1_-}{\partial \hat{s}} \right) = \frac{1}{\omega} K(\alpha) \left\langle \frac{\partial u^1}{\partial \hat{s}} \right\rangle$$

4.3 Cas d'une jonction de deux fentes (modèle temporel)

Nous partons du problème (4.2.1) et nous remplaçons $-\omega$ par une dérivation par rapport au temps (celà revient à reprendre l'étude du chapitre 3 pour la géométrie du chapitre 2). Nous prenons aussi $\mathbf{f} = 0$ (les données du problème seront données par les conditions de Cauchy) - nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \int_{S_\pm} \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}}(t, \cdot) \frac{\partial v}{\partial \hat{s}} + \frac{\partial^2 u^{\varepsilon,1}}{\partial t^2}(t, \cdot) v \right) + \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}(t, \pm L_\pm) v(\pm L_\pm) \\ + \frac{1}{\varepsilon K(\alpha)} [u^{\varepsilon,1}](t) [v] + \varepsilon \tan(\alpha) \frac{\partial^2 \langle u^{\varepsilon,1} \rangle}{\partial t^2} \langle v \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

La formule matricielle associée est :

$$\left(\mathcal{K}_h + \mathcal{M}_h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathcal{O}_h \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h + \varepsilon \mathcal{A}_h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U_h^{\varepsilon,1}(t) = 0 \quad (4.3.2)$$

Soit maintenant k le pas de discrétisation en temps. Notons alors U^n l'approximation de la fonction $U_h^{\varepsilon,1}(t)$ au temps $t_n = nk$. Nous utilisons un schéma aux différences finies pour discrétiser les termes $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Nous pouvons choisir de garder explicite les termes \mathcal{K}_h et/ou \mathcal{J}_h , ou au contraire de rendre ces termes implicites. À noter que rendre \mathcal{K}_h implicite rend le caractère diagonal de la matrice de masse caduque.

- Écriture d'un premier schéma, avec \mathcal{K}_h et \mathcal{J}_h explicites :

$$\left| \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{k^2} \mathcal{M}_h + \frac{\varepsilon}{k^2} \mathcal{A}_h + \frac{1}{2k} \mathcal{O}_h \right) U^{n+1} \\ &+ \left(-\frac{2}{k^2} \mathcal{M}_h - \frac{2\varepsilon}{k^2} \mathcal{A}_h + \mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^n \\ &+ \left(\frac{1}{k^2} \mathcal{M}_h + \frac{\varepsilon}{k^2} \mathcal{A}_h - \frac{1}{2k} \mathcal{O}_h \right) U^{n-1} \end{aligned} \right. \quad (4.3.3)$$

- Écriture d'un second schéma, avec \mathcal{K}_h explicite et \mathcal{J}_h implicite :

$$\left| \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{k^2} \mathcal{M}_h + \frac{\varepsilon}{k^2} \mathcal{A}_h + \frac{1}{2k} \mathcal{O}_h + \frac{1}{4\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^{n+1} \\ &+ \left(-\frac{2}{k^2} \mathcal{M}_h - \frac{2\varepsilon}{k^2} \mathcal{A}_h + \mathcal{K}_h + \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^n \\ &+ \left(\frac{1}{k^2} \mathcal{M}_h + \frac{\varepsilon}{k^2} \mathcal{A}_h - \frac{1}{2k} \mathcal{O}_h + \frac{1}{4\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^{n-1} \end{aligned} \right. \quad (4.3.4)$$

4.3.1 Étude de la stabilité numérique du schéma

Nous allons étudier ici la stabilité numérique des schémas (4.3.3) et (4.3.4). Dans les deux cas, nous multiplions par

$$\left(\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2k} \right)^T$$

et nous utilisons le fait que chaque matrice intervenant dans ces schémas est symétrique.

4.3.1.1 Étude de la stabilité numérique du schéma (4.3.3)

En notant \mathfrak{E}^n la quantité suivante

$$\left| \begin{aligned} \mathfrak{E}^n &= \frac{1}{2} \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{k} \right)^T (\mathcal{M}_h + \varepsilon \mathcal{A}_h) \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{k} \right) \\ &+ \frac{1}{2} (U^{n+1})^T \left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^n \end{aligned} \right. \quad (4.3.5)$$

la réécriture de (4.3.3) donne

$$\frac{\mathfrak{E}^n - \mathfrak{E}^{n-1}}{k} = - \left(\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2k} \right)^T \mathcal{O}_h \left(\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2k} \right) \leq 0 \quad (4.3.6)$$

Nous en déduisons que $\mathfrak{E}^n \leq \mathfrak{E}^0$. Cependant, nous ne contrôlons pas *a priori* le signe de tous les termes de cette énergie. Afin de pouvons contrôler les termes fautifs, nous utilisons une version matricielle de $2ab = a^2 + b^2 - (a - b)^2$. Plus précisément, nous avons

$$\left| \begin{aligned} (U^{n+1})^T \left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^n &= \frac{1}{2} \left((U^{n+1})^T \left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^{n+1} + (U^n)^T \left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^n \right) \\ &- \frac{k^2}{2} \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{k} \right)^T \left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{k} \right) \end{aligned} \right. \quad (4.3.7)$$

Nous pouvons alors réécrire (4.3.5) en utilisant (4.3.7) :

$$\left| \begin{aligned} \mathfrak{E}^n &= \frac{1}{2} \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{k} \right)^T \left(\mathcal{M}_h + \varepsilon \mathcal{A}_h - \frac{k^2}{2} \left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) \right) \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{k} \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left((U^{n+1})^T \left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^{n+1} + (U^n)^T \left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U^n \right) \end{aligned} \right. \quad (4.3.8)$$

Il nous reste alors à étudier le spectre de la matrice

$$\mathcal{M}_h + \varepsilon \mathcal{A}_h - \frac{k^2}{2} \left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) \quad (4.3.9)$$

Pour cela, nous allons étudier le problème aux valeurs propres généralisées : trouver $(\lambda, U) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{N_- + N_+ + 2}$ tels que

$$\left(\mathcal{K}_h + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h \right) U = \lambda \mathcal{M}_h U \quad (4.3.10)$$

Une étude classique de la stabilité L^2 nous donne la condition

$$\frac{k^2}{4} \max \lambda < 1 \quad (4.3.11)$$

Nous allons maintenant chercher les valeurs et fonctions propres de (4.3.10) suivant deux configurations possibles :

- le vecteur U satisfait $U_{N_-+1} = U_{N_-+2}$: il est alors possible de fusionner les lignes / colonnes $N_- + 1$ et $N_- + 2$ des matrices \mathcal{M}_h et \mathcal{K}_h . Il s'agit alors d'une étude classique de stabilité pour le schéma centré de l'équation des ondes. La plus grande valeur propre est $\lambda_{\max} = 4h^{-2}$ et le vecteur U associé vaut

$$U_i = \begin{cases} (-1)^i, & i \leq N_- + 1, \\ (-1)^{i+1}, & i \geq N_- + 2, \end{cases}$$

Associé à la condition de stabilité (4.3.11), nous retrouvons la condition classique de stabilité pour le schéma centré de l'équation des ondes :

$$\frac{k}{h} < 1$$

- le vecteur U ne satisfait pas $U_{N_-+1} = U_{N_-+2}$: nous cherchons alors une écriture de U sous la forme

$$U_i = \begin{cases} c_- r^{N_-+1-i}, & i \leq N_- + 1, \\ c_+ r^{i-N_-+2}, & i \geq N_- + 2, \end{cases} \quad (4.3.12)$$

L'injection de (4.3.12) dans (4.3.10) nous donne :

- pour les lignes autres que $N_- + 1$ et $N_- + 2$, nous avons

$$\frac{-r^2 + 2r - 1}{h^2} = \lambda r \quad (4.3.13)$$

Si $\lambda \leq 4h^{-2}$, le discriminant de l'équation ci-dessus est négatif, et les deux racines sont complexes conjuguées de module 1. Le vecteur propre associé a une nature ondulatoire. Nous allons maintenant supposer que $\lambda > 4h^{-2}$, et nous considérerons la solution r de (4.3.13) qui est strictement inférieure à 1.

- pour les lignes $N_- + 1$ et $N_- + 2$:

$$\frac{1}{h} c_- (1 - r) + \frac{1}{\varepsilon K(\alpha)} (c_- - c_+) = \lambda h c_- \quad (4.3.14-(i))$$

$$\frac{1}{h} c_+ (1 - r) + \frac{1}{\varepsilon K(\alpha)} (c_+ - c_-) = \lambda h c_+ \quad (4.3.14-(ii))$$

En faisant la somme et la différence des deux lignes (4.3.14-(i)) et (4.3.14-(ii)), nous obtenons

$$\frac{1}{h} (c_+ + c_-) (1 - r) = \lambda h (c_+ + c_-) \quad (4.3.15-(i))$$

$$\frac{1}{h} (c_+ - c_-) (1 - r) + \frac{2}{\varepsilon K(\alpha)} (c_+ - c_-) = \lambda h (c_+ - c_-) \quad (4.3.15-(ii))$$

Par hypothèse sur λ et sur r , nous en déduisons de (4.3.15-(i)) que $c_+ + c_- = 0$ (le mode associé est impair par rapport à la jonction). De plus, (4.3.15-(ii)) donne

$$\lambda = \frac{2}{\varepsilon h K(\alpha)} + \frac{1}{h^2} (1 - r) \geq \frac{2}{\varepsilon h K(\alpha)} \quad (4.3.16)$$

et la condition (4.3.11) nous donne alors

$$\frac{k^2}{2\varepsilon h K(\alpha)} < 1 \quad (4.3.17)$$

Nous pouvons voir que la condition (4.3.17) est une mauvaise condition de stabilité : à h fixé, le domaine de validité de k tend vers 0 quand ε tend vers 0. Cela signifie qu'à T et h fixés, plus ε est petit, plus il faudra d'itérations de calculs pour connaître la solution au temps T . De plus, si nous nous plaçons sous la condition classique $k/h < 1$, et que nous prenons ε pour lequel (4.3.17) n'est pas vrai, alors le schéma n'est pas stable, comme nous pouvons le voir par exemple sur la figure 4.8.

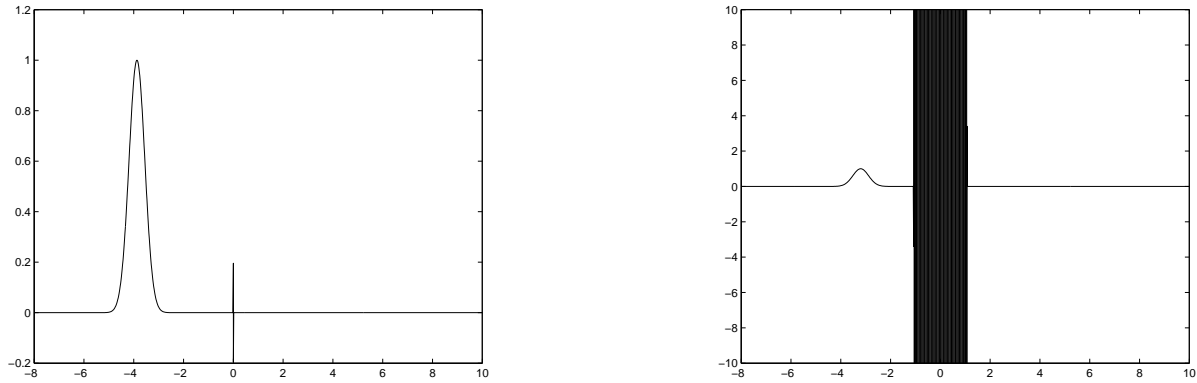


FIGURE 4.8 – Instabilité numérique obtenue avec le jeu de paramètres suivants : $h = 10^{-3}$, $k/h = 0.5$, $\alpha = \pi/4$ et $\varepsilon = 10^{-5}$. La solution obtenue est tracée au bout de 16 itérations de calculs (figure de gauche) et 100 itérations de calculs (figure de droite).

4.3.1.2 Étude de la stabilité numérique du schéma (4.3.4)

En notant \mathfrak{E}^n la quantité suivante

$$\left| \begin{aligned} \mathfrak{E}^n &= \frac{1}{2} \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{k} \right)^T (\mathcal{M}_h + \varepsilon \mathcal{A}_h) \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{k} \right) \\ &+ \frac{1}{2} (U^{n+1})^T \mathcal{K}_h U^n + \frac{1}{2} \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right)^T \mathcal{J}_h \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right) \end{aligned} \right. \quad (4.3.18)$$

la réécriture de (4.3.4) donne de nouveau (4.3.6). En faisant de nouveau l'étude de stabilité, nous devons maintenant étudier le problème de valeurs propre généralisées suivantes : trouver $(\lambda, U) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{N_- + N_+ + 2}$ tels que

$$\mathcal{K}_h U = \lambda \mathcal{M}_h U \quad (4.3.19)$$

En utilisant l'étude précédente, nous obtenons la condition de stabilité suivante : $k/h < 1$.

4.3.2 Estimations d'erreur

Nous sommes partis des données de Cauchy suivantes

$$\begin{aligned} u(0, \hat{s}) &= \exp \left(-5 \left(\hat{s} + \frac{L}{2} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \hat{s}) &= 10 \left(\hat{s} + \frac{L}{2} \right) \exp \left(-5 \left(\hat{s} + \frac{L}{2} \right)^2 \right) = -\frac{\partial u}{\partial \hat{s}}(0, \hat{s}) \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

de manière à avoir, pour t petit et aux erreurs du schéma près :

$$u(t, \hat{s}) = u(0, \hat{s} - t)$$

Nous avons tracé en noir sur la figure 4.9 l'erreur L^2 entre la solution du problème exact et la solution du problème limite; et en noir l'erreur entre la solution du problème exact et la solution du problème 1D modifié, pour un temps correspondant à la longueur de la première fente, ce afin de voir

les effets de la jonction (si nous regardons les différences pour un temps trop petit, les seuls effets visibles sont les effets purement numériques). Nous pouvons voir que l'erreur entre la solution exacte et la solution du problème limite est en ε pour $k = 0$. Nous pouvons également voir que l'erreur entre la solution exacte et la solution du problème 1D modifié est en ε^3 . Nous devrions avoir une erreur en ε^2 . Cette différence d'ordre dans l'estimation d'erreur est dû en réalité au fait que les conditions de Kirchhoff améliorées (2.4.10) que nous avons construites sont des conditions de Kirchhoff d'ordre 2 (la remarque 4.2.2 s'applique également dans ce cas-là, modulo le passage en temporel).

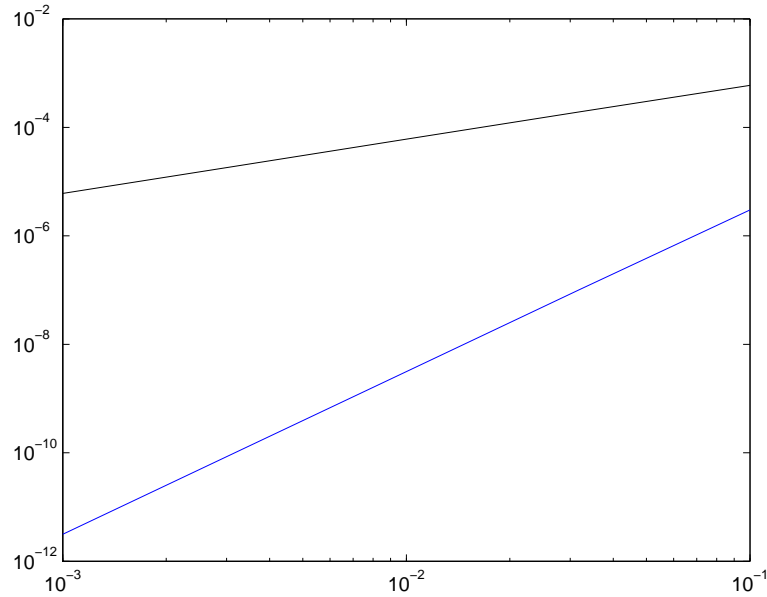


FIGURE 4.9 – Erreur L^2 entre la solution du problème exact et les solutions des différents problèmes 1D (en noir pour le problème d'ordre 0 en ε , en bleu pour le problème d'ordre 1) par rapport à ε .

4.4 Cas d'une jonction de N fentes

Dans le cas d'une jonction de N fentes, nous reprenons l'étude de la section 4.3, mais nous adaptons au cas d'une jonction de N fentes.

4.4.1 Méthode de calcul des matrices \mathcal{J} et \mathcal{A}

Pour cette méthode de calcul, nous supposons les assertions suivantes sur le maillage comme valides :

- pour $1 \leq i \leq N$, le numéro de label des points du maillage appartenant à Σ_i est i ,
- le numéro de label des points du maillage appartenant à $\partial\hat{\mathcal{J}} \setminus (\bigcup \Sigma_i)$ est $N + 1$ (nous gardons le numéro de label 0 pour les points intérieurs du maillage).

Nous avons implémenté une version générale sous FREEFEM++ qui suit l'optique de ce qui a été fait dans le cas de la résolution numérique de Φ_α , et qui a été optimisée (les matrices associées aux calculs des termes de chaque opérateur DtN sont directement rentrées sous la forme d'une liste de coordonnées

- ce format de stockage de matrice est le format de stockage utilisé entre autres par MATLAB⁵). Nous résolvons le système en utilisant le solveur UMFPACK [Dav04], et nous enlevons la valeur moyenne de la fonction car la solution retournée ne vérifie pas forcément la condition de moyenne nulle.

```
// Nombre de points par unite de longueur et nombre de modes pour
// l'operateur tronque DtN
int N=20;
int Pmax=30;

// Jeu de couleurs
real[int] colorhsv = [
8./12., 0., 1., 8./12., 1., 1., 7./12., 1., 1., 6./12., 1., 1.,
5./12., 1., 1., 4./12., 1., 1., 3./12., 1., 1., 2./12., 1., 1.,
1./12., 1., 1., 0., 1., 1., 0., 0., 0.];

// Nombre d'operateurs DtN que nous devons construire
int NumberOfDtn=3;

// Definition de la matrice de saut de flux K
real[int, int] MatrixK(NumberOfDtn,NumberOfDtn);

// Construction et affichage du maillage
border DTN1(t=0,1){x=0; y=1-t; label=1;};
border NEUMANN1(t=0,0.5){x=t; y=0; label=NumberOfDtn+1;};
border DTN2(t=0,0.5){x=t+0.5; y=t; label=2;};
border NEUMANN2(t=0,0.5){x=1; y=t+0.5; label=NumberOfDtn+1;};
border DTN3(t=0,1){x=1-t; y=1; label=3;};

mesh Junction=buildmesh(DTN1(N) + NEUMANN1(0.5*N) + DTN2(sqrt(2.)/2.*N)
+ NEUMANN2(0.5*N) + DTN3(N));
plot(Junction, ps="N_mesh.eps");

// Construction du tableau des valeurs relatives
real[int] RelativeWidth(NumberOfDtn);
RelativeWidth(0)=1.0; RelativeWidth(1)=sqrt(2.)/2.; RelativeWidth(2)=1.0;

// Definition des espaces fonctionnels et de la matrice du Laplacien
fespace Vh(Junction, P1);
varf Laplacian(u,v)=int2d(Junction)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v));
matrix MatrixProblem=Laplacian(Vh,Vh);

// Construction des operateurs DtN
for(int CurrentDtn=1; CurrentDtn <= NumberOfDtn; CurrentDtn++)
{
cout << "Traitement_de_l'operateur_DtN_" << CurrentDtn << endl;
for(int p=1; p <= Pmax; p++)
{
real CoeffX, CoeffY, Phase;
if (CurrentDtn == 1)
{
CoeffX=0.; CoeffY=1.; Phase=0.;

```

5. <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/sparse.html>


```

    }
    if (CurrentDtn == 2)
    {
        CoeffX=1.; CoeffY=1.; Phase=-0.5;
    }
    if (CurrentDtn == 3)
    {
        CoeffX=1.; CoeffY=0.; Phase=0.;
    }
    func g=cos(p*pi*(CoeffX*x+CoeffY*y+Phase));
    varf ell(u,v)=int1d(Junction,CurrentDtn)(g*v);
    real[int] wp=ell(0,Vh);
    real[int,int] Wp(MatrixProblem.n,MatrixProblem.n);
    int NumberElementsOnEdge=0;
    real[int] NonZerosElements(1);
    for(int j=0; j < MatrixProblem.n; j++)
    {
        if ( wp(j) != 0 )
        {
            NumberElementsOnEdge++;
            NonZerosElements.resize(NumberElementsOnEdge);
            NonZerosElements(NumberElementsOnEdge-1)=j;
        }
    }

    int[int] DtnI(NumberElementsOnEdge*NumberElementsOnEdge),
             DtnJ(NumberElementsOnEdge*NumberElementsOnEdge);
    real[int] DtnValues(NumberElementsOnEdge*NumberElementsOnEdge);

    for(int j=0; j < NumberElementsOnEdge; j++)
    {
        for(int k=0; k < NumberElementsOnEdge; k++)
        {
            DtnI(NumberElementsOnEdge*j+k)=NonZerosElements(j);
            DtnJ(NumberElementsOnEdge*j+k)=NonZerosElements(k);
            DtnValues(NumberElementsOnEdge*j+k)=p*pi
                                                    /RelativeWidth(CurrentDtn-1)
                                                    *wp(NonZerosElements(j))
                                                    *wp(NonZerosElements(k));
        }
    }
    matrix MatrixDtn=[DtnI, DtnJ, DtnValues];
    MatrixProblem=MatrixProblem+MatrixDtn;
    cout << "Ajout_du_mode_" << p << endl;
}

// Positionnement du solveur
set(MatrixProblem, solver=UMFPACK);

// Allocation des fonctions inconnues et des seconds membres
Vh[int] Wi(NumberOfDtn);
Vh[int] Fi(NumberOfDtn);

```

```

// Construction des differents seconds membres et resolution pour chaque
for (int CurrentMode=1; CurrentMode < NumberOfDtn; CurrentMode++)
{
    varf RHS(u,v)=int1d(Junction ,CurrentMode)(1/RelativeWidth (CurrentMode-1)*v)
                -int1d(Junction ,CurrentMode+1)(1/RelativeWidth (CurrentMode)*v);
    real[int] RightHandSide=RHS(0,Vh);
    // Matrice singuliere - calcule la solution au sens
    // des moindres carres
    Fi[CurrentMode][ ] = RightHandSide;
    Wi[CurrentMode][ ] = MatrixProblem^-1 * Fi[CurrentMode][ ];
    // Nous rectifions pour avoir la solution a moyenne nulle
    Vh Constant=1;
    real Average=int2d(Junction)(Wi[CurrentMode]);
    Wi[CurrentMode]=Wi[CurrentMode]-Average*Constant;
    string OutputName="N_Mode"+CurrentMode+".eps";
    plot(Wi[CurrentMode], fill=true, hsv=colorhsv, ps=OutputName,
        boundary=false);
}

// Calcul de la matrice K
// Nous utilisons le fait que MatrixProblem * Wi = Fi
for (int j=0; j < NumberOfDtn; j++)
{
    for (int k=0; k < NumberOfDtn; k++)
    {
        MatrixK(j,k) = Wi[j][ ] * Fi[k][ ]; //On prend Wi[j][ ] '
    }
}

// Sortie de la matrice K

```

Nous obtenons les résultats suivants

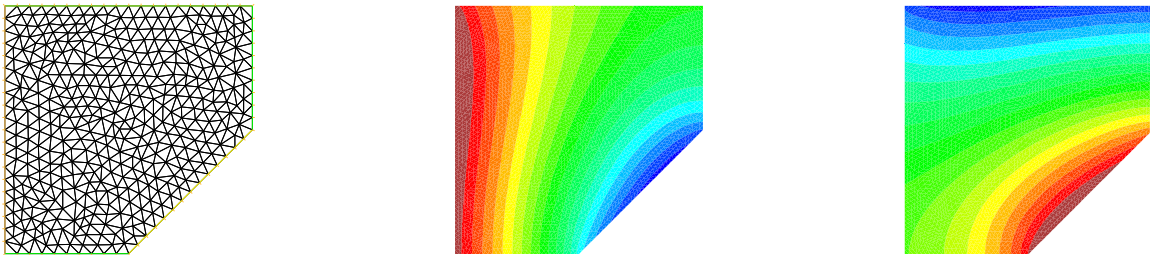


FIGURE 4.10 – Maillage de la jonction (gauche), solutions \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 (milieu et droite)

4.4.2 Schéma numérique

4.4.2.1 Écriture du schéma numérique

Nous partons de la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\varepsilon\sigma_i}^{L_i} \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial \hat{s}_i}(t, \cdot) \frac{\partial v}{\partial \hat{s}_i} + \frac{\partial^2 u^{\varepsilon,1}}{\partial t^2}(t, \cdot) v \right) + \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}(t, \pm L_{\pm}) v(\pm L_{\pm}) \\ + (V^{\varepsilon})^T \left(\mathcal{J}U^{\varepsilon,1} + \mathcal{A} \frac{\partial^2 U^{\varepsilon,1}}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Sur chaque fente, nous choisissons un pas h_i tel que $n_i = \frac{L_i - \varepsilon\sigma_i}{h_i}$ soit entier (ce qui donne $n_i + 1$ points de discrétisation). Nous notons alors

- \mathbf{N}_i l'indice cumulé

$$\mathbf{N}_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ \mathbf{N}_{i-1} + n_{i-1} + 1, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.4.2)$$

- $\mathfrak{N} = \sum (n_i + 1)$

L'idée est de considérer alors $U_h^{\varepsilon,1}(t)$ le vecteur appartenant à $\mathbb{R}^{\mathfrak{N}}(t)$ tel que, pour $1 \leq i \leq N$, le sous-vecteur de $U_h^{\varepsilon,1}(t)$ pris entre les indices \mathbf{N}_i et $\mathbf{N}_{i+1} - 1$ corresponde à la valeur de $u^{\varepsilon,1}$ sur les points d'interpolations de S_i (en commençant par le point d'interpolation $\varepsilon\sigma_i$). Nous introduisons alors les matrices suivantes, pour pouvoir écrire un schéma numérique semi-discrétisé analogue au schéma (4.3.2) :

- la matrice de rigidité \mathcal{K}_h^N est la matrice diagonale par blocs donnée par

$$\mathcal{K}_h^N = \begin{pmatrix} \beta_1 K_{h_1, N_1+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \beta_N K_{h_N, n_N+1} \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

où $K_{h, \mathbf{N}}$ n'est autre que la matrice donnée par (4.2.3),

- la matrice de masse \mathcal{M}_h^N est la matrice diagonale par blocs donnée par

$$\mathcal{M}_h^N = \begin{pmatrix} \beta_1 M_{h_1, N_1+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \beta_N M_{h_N, n_N+1} \end{pmatrix} \quad (4.4.4)$$

où $M_{h, \mathbf{N}}$ n'est autre que la matrice donnée par (4.2.5),

- la matrice creuse \mathcal{J}_h^N qui est nulle partout sauf aux N^2 coefficients suivants :

$$(\mathcal{J}_h^N)_{\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j} = (\mathcal{J})_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (4.4.5)$$

- la matrice creuse \mathcal{A}_h^N qui est nulle partout sauf aux N^2 coefficients suivants :

$$(\mathcal{A}_h^N)_{\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j} = (\mathcal{A})_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (4.4.6)$$

Nous obtenons le schéma semi-discrétisé suivant :

$$\left(\mathcal{K}_h^N + \mathcal{M}_h^N \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{J}_h^N + \varepsilon \mathcal{A}_h^N \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U_h^{\varepsilon,1}(t) = 0 \quad (4.4.7)$$

Soit maintenant k le pas de discrétisation en temps (indépendant de la fente sur laquelle nous nous situons). Notons alors U^m l'approximation de la fonction $U_h^{\varepsilon,1}$ au temps $t_m = mk$. Nous utilisons un schéma aux différences finies pour discrétiser le terme en $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, et nous implicitions le terme en \mathcal{J}_h^N . Nous obtenons le schéma numérique suivant :

$$\left| \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{k^2} \mathcal{M}_h^N + \frac{\varepsilon}{k^2} \mathcal{A}_h^N + \frac{1}{4\varepsilon} \mathcal{J}_h^N \right) U^{m+1} \\ &+ \left(-\frac{2}{k^2} \mathcal{M}_h^N - \frac{2\varepsilon}{k^2} \mathcal{A}_h^N + \mathcal{K}_h^N + \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{J}_h^N \right) U^m \\ &+ \left(\frac{1}{k^2} \mathcal{M}_h^N + \frac{\varepsilon}{k^2} \mathcal{A}_h^N + \frac{1}{4\varepsilon} \mathcal{J}_h^N \right) U^{m-1} \end{aligned} \right. \quad (4.4.8)$$

Une étude analogue à l'étude de stabilité du schéma numérique (4.3.4) nous montre que ce schéma est stable sous la condition

$$k < h_i, \quad \forall 1 \leq i \leq N \quad (4.4.9)$$

4.4.2.2 Implémentation et estimations d'erreur

En pratique, nous partons d'un pas d'espace h global, nous prenons un pas de temps k tel que la condition $k < h$ soit satisfaite, et nous prenons $h_i > h$ pour $1 \leq i \leq N$ tel que la condition $\frac{L_i - \varepsilon \sigma_i}{h_i} \in \mathbb{N}$ soit satisfaite. Pour plusieurs valeurs de ε , nous calculons la solution exacte sur un maillage très fin (le calcul a été effectué en utilisant le code MONTJOIE) qui s'appuie sur la méthode des éléments finis mixtes spectraux [Coh02], et nous calculons la solution du problème limite d'une part, ainsi que la solution du problème (3.4.2, 3.4.22) en utilisant le code NETWAVES⁶, dont l'implémentation détaillée peut être trouvée dans [Sem09]. La donnée de Cauchy utilisée est une gaussienne centrée sur la première fente, et se dirigeant vers la jonction. Pour les estimations d'erreur, nous prenons $\delta = 2\varepsilon_{\max}$ et nous utilisons un pas d'espace suffisamment petit pour ne pas avoir à tenir compte de l'erreur numérique.

Nous avons tracé en noir sur la figure 4.11 l'erreur L^2 entre la solution du problème exact et la solution du problème limite; et en noir l'erreur entre la solution du problème exact et la solution du problème (3.4.2, 3.4.22), pour un temps correspondant à la longueur de la première fente, ce afin de voir les effets de la jonction (si nous regardons les différences pour un temps trop petit, les seuls effets visibles sont les effets purement numériques). Nous pouvons voir que l'erreur entre la solution exacte et la solution du problème limite est en ε , ce qui est une conséquence du théorème 3.3.15 pour $k = 0$. Nous pouvons également voir que l'erreur entre la solution exacte et la solution du problème (3.4.2, 3.4.22) est en ε^2 - nous retrouvons le résultat du théorème 3.4.19.

En pratique, si nous prenons un pas d'espace h qui reste proportionnel à ε , nous retrouvons le même type d'erreur numérique pour la norme L^2 .

6. <https://gforge.inria.fr/projects/netwaves/>

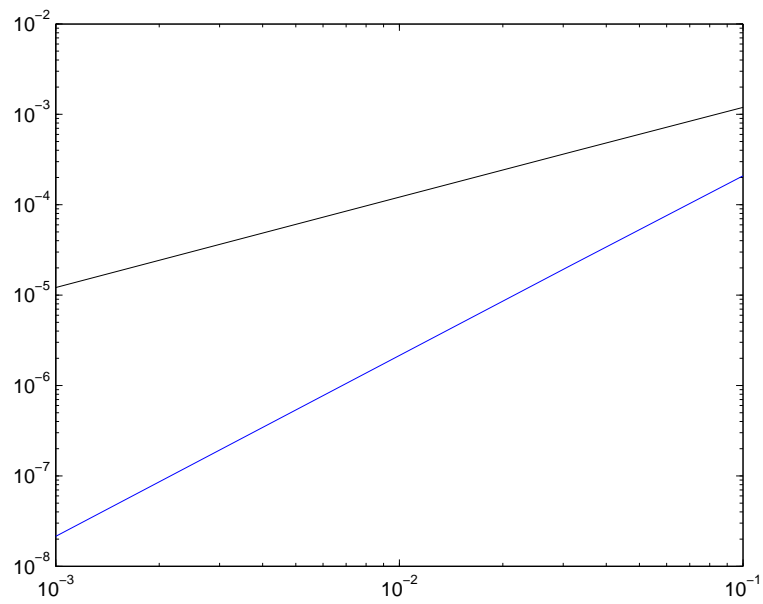


FIGURE 4.11 – Erreur L^2 entre la solution du problème exact et les solutions des différents problèmes 1D (en noir pour le problème d'ordre 0 en ε , en bleu pour le problème d'ordre 1) par rapport à ε .

Deuxième partie

Résolution dans des réseaux infinis

Résolution du problème de Laplace dans un réseau fractal

Résumé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'opérateur de Laplace sur une structure fractale. En particulier, nous cherchons à définir un cadre fonctionnel. La section 5.1 sert à introduire des notations qui rendront l'écriture de certaines démonstrations des propositions plus simples. Dans la section 5.2, nous introduisons des espaces fonctionnels naturels associés à notre géométrie, et nous donnons quelques propriétés générales sur ces espaces fonctionnels. Dans la section 5.3, nous donnons un résultat de densité. Ce résultat de densité fait intervenir la résolution du problème de Laplace sur un tel réseau. Enfin, dans la section 5.4, nous donnons quelques résultats sur les opérateurs de trace.

Sommaire

5.1	Notations et formules utiles	121
5.2	Réseaux p-adiques auto-similaires et espaces fonctionnels associés	124
5.2.1	Définitions et propriétés élémentaires du réseau	124
5.2.2	Espaces de Sobolev et normes faibles	128
5.2.3	Fonctions auto-similaires	132
5.3	Densité des fonctions à support compact	133
5.3.1	$\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$: une première CNS implicite	133
5.3.2	Étude d'un problème de Laplace auxiliaire et CNS explicite	136
5.4	Quelques résultats sur les opérateurs de trace	143
5.4.1	Définition des opérateurs de trace	144
5.4.2	Théorèmes de trace	145

5.1 Notations et formules utiles

Nous introduisons dans cette section quelques notations et règles de calculs qui nous seront très utiles par la suite, particulièrement en ce qui concerne la rédaction d'autres calculs beaucoup plus complexes.

Définition 5.1.1. Soit (\mathbb{K}, \star) un groupe quelconque, non-nécessairement abélien. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a = (a_0, \dots, a_{p-1})$ un p -uplet de \mathbb{K} . Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$, on note $[j_{n-1}j_{n-2} \dots j_1j_0]_p$ l'écriture en base p du nombre j en utilisant n chiffres, en constatant alors que nous avons la relation $j = \sum j_\ell p^\ell$. Notons alors $[a]_{p,j}^n$ l'élément de \mathbb{K} donné par

$$[a]_{p,j}^n = a_{j_0} \star a_{j_1} \star \dots \star a_{j_{n-2}} \star a_{j_{n-1}} \quad (5.1.1)$$

Remarque 5.1.2. Dans la définition 5.1.1, le fait de ne pas considérer (\mathbb{K}, \star) commutatif vient du fait que nous appliquerons cette définition à l'ensemble des similitudes directes contractantes.

Remarque 5.1.3. Nous avons plusieurs remarques à faire sur cette notation :

- par convention, $[a]_{p,0}^0$ est l'élément neutre du groupe \mathbb{K} pour la loi \star ,
- toujours par convention ; $[a]_{p,j}^{-n}$ est l'élément inverse de l'élément $[a]_{p,j}^n$ pour la loi \star ,
- quand le groupe K est un groupe abélien, pour tous p -uplets $a = (a_0, \dots, a_{p-1})$ et $b = (b_0, \dots, b_{p-1})$, pour tous (j, n) , nous avons $[a \star b]_{p,j}^n = [a]_{p,j}^n \star [b]_{p,j}^n$.

Lemme 5.1.4. *Soit (\mathbb{K}, \star) un groupe, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit (a_0, \dots, a_{p-1}) un p -uplet de \mathbb{K} . Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, quel que soit $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$, quel que soit $k \in \{0, \dots, p - 1\}$, on a*

$$[a]_{p,jp+k}^{n+1} = a_k \star [a]_{p,j}^n \quad (5.1.2)$$

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition 5.1.1 du symbole $[a]_{p,j}^n$, en remarquant que si nous notons $[j_{n-1}j_{n-2} \dots j_1j_0]_p$ l'écriture en base p du nombre j en utilisant n chiffres, alors l'écriture du nombre $pj + k$ en base p en utilisant $n + 1$ chiffres s'écrit $[j_{n-1}j_{n-2} \dots j_1j_0k]_p$ \square

Remarque 5.1.5. Comme nous pourrions le voir plus tard, ce lemme justifie à lui tout seul l'introduction de la notation de la définition précédente.

Corollaire 5.1.6. *Soit (\mathbb{K}, \star) un groupe, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit (a_0, \dots, a_{p-1}) un p -uplet de \mathbb{K} . Soient $n, n' \in \mathbb{N}^2$ et soient $0 \leq j < p^n$, $0 \leq j' < p^{n'}$. Alors nous avons*

$$[a]_{p,p^n j'+j}^{n+n'} = [a]_{p,j}^n [a]_{p,j'}^{n'} \quad (5.1.3)$$

Démonstration. Il suffit de constater que l'écriture de $p^n j' + j$ sur $n + n'$ chiffres en base p est $[j'_{n'-1} \dots j'_1 j'_0 j_{n-1} \dots j_1 j_0]$, ce qui correspond à la juxtaposition des écritures de j' et de j sur n' et n chiffres en base p , et d'utiliser la définition 5.1.1 pour conclure. \square

Lemme 5.1.7. *Soit $(\mathbb{K}, \star) = (\mathbb{R}_+^*, \times)$, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit (a_0, \dots, a_{p-1}) un p -uplet de \mathbb{R}_+^* . Alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} [a]_{p,j}^n = \left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i \right)^n \quad (5.1.4)$$

Démonstration. Démontrons la relation (5.1.4) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, cette relation devient $1 = 1$, donc est trivialement vraie.

Supposons maintenant qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que (5.1.4) soit vraie. Montrons alors que (5.1.4) est vraie au rang $n + 1$. En utilisant le fait que tout nombre $j \in \{0, \dots, p^{n+1} - 1\}$ s'écrit de manière unique sous la forme $j = lp + k$, avec $l \in \{0, \dots, p^n - 1\}$ et $k \in \{0, \dots, p - 1\}$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p^{n+1}-1} [a]_{p,j}^{n+1} &= \sum_{l=0}^{p^n-1} \sum_{k=0}^{p-1} [a]_{p,lp+k}^{n+1} \\ &= \sum_{l=0}^{p^n-1} \sum_{k=0}^{p-1} a_k [a]_{p,l}^n \quad (\text{lemme 5.1.4}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k \right) \sum_{l=0}^{p^n-1} [a]_{p,l}^n \quad (\text{réorganisation d'une somme finie}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k \right) \left(\sum_{i=0}^{p^n-1} a_i \right)^n \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \end{aligned}$$

La récurrence est donc établie. \square

Proposition 5.1.8. Soit (\mathbb{K}, \star) un groupe commutatif, et soit $((a_0, a_1, \dots, a_{p-1}), (b_0, b_1, \dots, b_{p-1}))$ deux p -uplets de (\mathbb{K}, \star) . Nous avons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $0 \leq j \leq p^n - 1$,

$$[a \star b]_{p,j}^n = [a]_{p,j}^n \star [b]_{p,j}^n \quad (5.1.5)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j \leq p^n - 1$. Nous partons du membre de gauche de (5.1.5) et nous appliquons la définition (5.1.1) avec le p -uplet $(a_0 \star b_0, a_1 \star b_1, \dots, a_{p-1} \star b_{p-1})$. Nous réordonnons alors en triant les termes en a_i des termes en b_i , et nous réutilisons deux fois la définition (5.1.1) avec les p -uplets $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ et $(b_0, b_1, \dots, b_{p-1})$ pour conclure. \square

Pour la définition suivante et les propriétés qui en découlent, nous nous plaçons dans le cadre $(\mathbb{K}, \star) = (\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Définition 5.1.9. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ un p -uplet de (\mathbb{R}_+^*, \times) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{0, \dots, p^n\}$, on note le nombre suivant

$$[[a]]_{p,k}^n = \sum_{j=0}^{k-1} [a]_{p,j}^n \quad (5.1.6)$$

avec la convention $[[a]]_{p,0}^n = 0$ (héritée de la convention : “une somme vide est nulle”).

Lemme 5.1.10. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ un p -uplet de (\mathbb{R}_+^*, \times) , alors nous avons les propriétés suivantes, vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, p^n\}$:

- (i) $[[a]]_{p,p^n}^n = \left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i \right)^n$
- (ii) $[[a]]_{p,pj}^{n+1} = \left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i \right) [[a]]_{p,j}^n$
- (iii) $[[a]]_{p,j+1}^n - [[a]]_{p,j}^n = [a]_{p,j}^n$

Démonstration. Le point (iii) vient directement de la définition donnée par (5.1.6). Le point (i) est une autre manière d'énoncer le lemme 5.1.7. Le point (ii) est un peu plus délicat à démontrer. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, \dots, p^n\}$. En utilisant la définition (5.1.6), nous avons

$$[[a]]_{p,pj}^{n+1} = \sum_{\ell=0}^{pj-1} [a]_{p,\ell}^{n+1}$$

nous décomposons ℓ en utilisant la division euclidienne par p , i.e $\ell = pl + i$, avec $0 \leq l < j$ et $0 \leq i < p$, et nous pouvons réécrire la relation suivante sous la forme suivante, en sommant sur tous les i pour un l donné :

$$[[a]]_{p,pj}^{n+1} = \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{i=0}^{p-1} [a]_{p,lp+i}^{n+1}$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme 5.1.4, de sortir la somme sur i et de réutiliser la définition (5.1.6) pour conclure. \square

5.2 Réseaux p -adiques auto-similaires et espaces fonctionnels associés

Dans cette section, nous allons donner la définition de ce que nous considérerons comme étant un réseau p -adique auto-similaire, et donner quelques propriétés sur la topologie du réseau. Nous allons également définir notre cadre fonctionnel, donner les normes que nous considérerons sur ce réseau, et donner des propriétés sur les fonctions que nous définirons sur ce réseau. Nous donnerons d'abord des définitions sur le réseau (paragraphe 5.2.1), puis des définitions sur les normes (paragraphe 5.2.2),

5.2.1 Définitions et propriétés élémentaires du réseau

Définition 5.2.1 (Similitudes directes). Soit s une application affine de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d .

- On dira que s est une similitude directe si s est la composition de translations, de rotations et d'homothéties. Dans ce cas, on notera α le produit des rapports des homothéties, et on dira que la similitude s est une similitude directe de rapport α .
- On dira que s est une similitude directe strictement contractante si de plus $\alpha < 1$.

Remarque 5.2.2. Il est toujours possible de se ramener à une seule homothétie, quitte à modifier les rotations et/ou les translations que nous faisons intervenir.

Définition 5.2.3 (Réseau p -adique auto-similaire). Soit \mathcal{T} un sous-espace connexe de \mathbb{R}^d . On dira que \mathcal{T} est un réseau p -adique auto-similaire si il est possible de trouver $\widehat{\Sigma}$ sous-espace connexe de \mathbb{R}^d et un p -uplet de similitudes directes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ tels que

$$\overline{\mathcal{T}} = \widehat{\Sigma} \cup \bigcup_{i=0}^{p-1} \overline{s_i(\mathcal{T})} \quad \text{et} \quad \widehat{\Sigma}, s_0(\mathcal{T}), s_1(\mathcal{T}), \dots, s_{p-1}(\mathcal{T}) \quad \text{disjoints 2 à 2} \quad (5.2.1)$$

Dans ce cas-là, nous dirons que \mathcal{T} est un réseau p -adique auto-similaire de générateur $\widehat{\Sigma}$ et de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$.

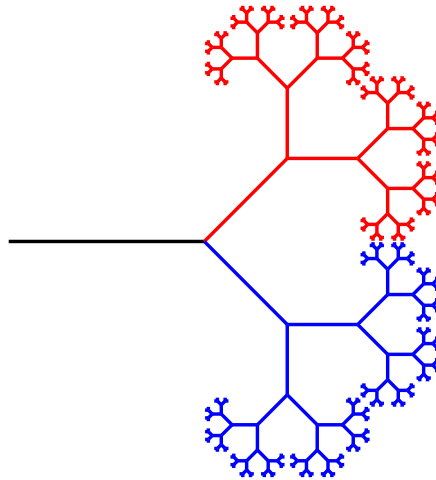


FIGURE 5.1 – Exemple de réseau p -adique autosimilaire (avec $p = 2$) : $\widehat{\Sigma}$, $s_1(\mathcal{T})$ et $s_2(\mathcal{T})$ - les similitudes sont de rapport égal à 0.6 et d'angle égal à $\pm \frac{\pi}{4}$, et on a limité le tracé à 9 générations

La figure 5.1 est un exemple de réseau diadique (i.e. un réseau p -adique, avec $p = 2$).

Remarque 5.2.4. A partir de la définition 5.2.3, il est possible d'introduire plusieurs notations :

- $\Sigma_{p,j}^n := [s]_{p,j}^n(\widehat{\Sigma})$ (nous pouvons remarquer que ces ensembles sont deux à deux disjoints, grâce à la relation (5.2.1)),
- \mathcal{G}^n comme la réunion des $\Sigma_{p,j}^n$, pour $0 \leq j < p^n$, nous pouvons constater qu'il s'agit de la réunion des éléments se trouvant à une distance n (au sens du nombre de similitudes s_i appliquées) de $\widehat{\Sigma}$ - nous dirons que \mathcal{G}^n est la $n^{\text{ème}}$ génération du réseau \mathcal{T} ,
- \mathcal{T}^n comme la réunion des \mathcal{G}^k , avec $0 \leq k \leq n$ - nous dirons que \mathcal{T} est le sous-réseau fini de \mathcal{T} tronqué à la $n^{\text{ème}}$ génération.

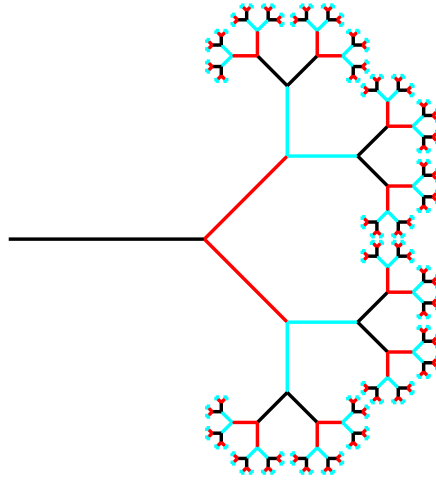


FIGURE 5.2 – Configuration des \mathcal{G}^n pour le réseau de la figure 5.1 : \mathcal{G}^0 , \mathcal{G}^1 , \mathcal{G}^2 , \mathcal{G}^3 , \mathcal{G}^4 , \mathcal{G}^5 , etc.

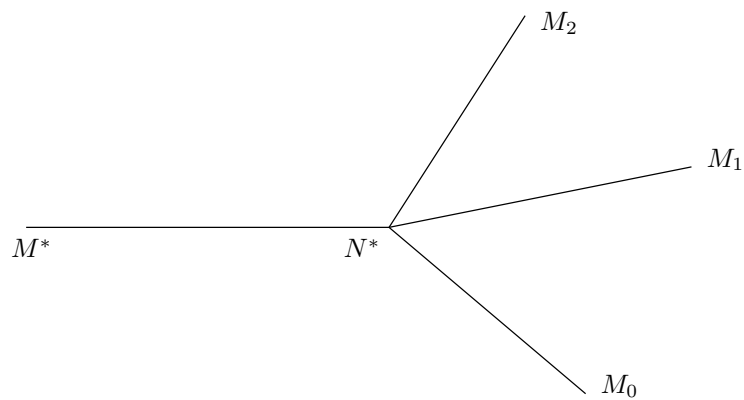
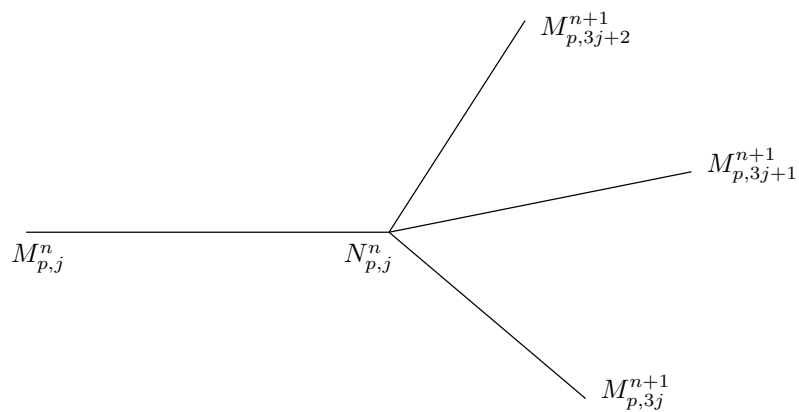
Exemple 5.2.5 (Exemple de référence). La géométrie que nous allons considérer peut être vue comme une géométrie dans \mathbb{R}^2 ou une géométrie dans \mathbb{R}^3 .

Nous considérons un motif élémentaire $\widehat{\Sigma}$ formé par $p + 1$ lignes droites M^*N^* et M_iN^* , pour $0 \leq i < p$ - c.f. figure 5.3. Nous considérerons également p similitudes directes $(s_i)_{0 \leq i < p}$ telles que $s_i(M^*) = M_i$ et telles que les points N^* , M_i et $s_i(N^*)$ soient alignés dans ce sens. On notera alors \mathcal{T} le réseau p -adique auto-similaire de générateur $\widehat{\Sigma}$ et de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$. On notera également α_i le rapport de la similitude s_i .

Nous introduisons alors les notations suivantes, pour un élément $\Sigma_{p,j}^n$ donné (voir figure 5.4) :

- $[M]_{p,j}^n = [s]_{p,j}^n(M^*)$, $[N]_{p,j}^n = [s]_{p,j}^n(N^*)$,
- L_i la longueur du segment $[M_iN^*]$ et L^* la longueur du segment M^*N^*

Remarque 5.2.6. Dans notre exemple, nous devons avoir, pour tout i , $L^* + L_i > 0$. Il est cependant possible d'imaginer un réseau pour lequel $L_i = 0$ (le générateur $\widehat{\Sigma}$ correspond donc à un segment, ce qui est le cas pour la figure 5.1). Nous avons toutefois gardé $L_i \geq 0$ dans la suite de ce chapitre à la fois pour des raisons historiques et pour des raisons pratiques, afin de différencier l'effet du point N^* des effets des points M_i .

FIGURE 5.3 – Configuration de $\hat{\Sigma}$ FIGURE 5.4 – Configuration de $\Sigma_{p,j}^n$

Proposition 5.2.7. *À partir de la définition des $\Sigma_{p,j}^n$ donnée dans la remarque 5.2.4, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et quel que soit $0 \leq j < p^n$, $0 \leq k < j$, nous avons*

$$\Sigma_{p,pj+k}^{n+1} = s_k(\Sigma_{p,j}^n) \tag{5.2.2}$$

Démonstration. La preuve se fait en une ligne, en utilisant la proposition 5.1.4 pour le groupe des similitudes directes muni de la loi de composition. \square

Définition 5.2.8 (Dimension de Hausdorff d'un réseau p -adique auto-similaire - voir [Hut81] pour plus de précisions à ce sujet). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de générateur $\widehat{\Sigma}$ et de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ strictement contractantes de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$. La dimension de Hausdorff de \mathcal{T} est donnée par l'unique nombre réel s strictement positif tel que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i^s = 1 \tag{5.2.3}$$

L'existence et l'unicité viennent du fait que la fonction $x \mapsto \sum \alpha_i^x$ est une fonction strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, car chaque α_i est strictement plus petit que 1.

Remarque 5.2.9. Une propriété concernant la théorie de Hausdorff (voir par exemple le livre de Gerard A. Edgar sur ce sujet [Edg90]) est que si $s > d$, les sous-ensembles $s_i(\mathcal{T})$ ne peuvent jamais être deux à deux disjoints.

La définition suivante que nous introduisons permet de quantifier "l'espace" occupé par un réseau dans \mathbb{R}^d , bien que le réseau soit un réseau $1D$ (et qu'à proprement parler son volume dans \mathbb{R}^d soit nul). Cette notion de volume correspond en fait au volume canonique occupé par un épaissement auto-similaire d'un paramètre ε aussi petit soit-il du réseau que l'on considère.

Définition 5.2.10 (Volume d'un réseau p -adique auto-similaire). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de générateur $\widehat{\Sigma}$ et de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ strictement contractantes de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$, obtenu par passage à la limite (au sens de la géométrie dans \mathbb{R}^d) d'un réseau p -adique auto-similaire \mathcal{T}^ε de générateur $\widehat{\Sigma}^\varepsilon$ et de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$, où le volume de $\widehat{\Sigma}^\varepsilon$ dans \mathbb{R}^d est non-nul (mais dont la limite du volume dans \mathbb{R}^d devient égale à 0, prenons par exemple $\widehat{\Sigma}^\varepsilon$ le domaine Ω^ε défini dans le chapitre 3). On appelle volume de \mathcal{T} , et on note $\text{Vol}(\mathcal{T})$, la quantité

$$\text{Vol}(\mathcal{T}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(\mathcal{T}^\varepsilon)}{\text{Vol}(\widehat{\Sigma}^\varepsilon)} \tag{5.2.4}$$

Proposition 5.2.11. *Nous gardons les notations de la définition (5.2.4). Alors*

- *le volume de \mathcal{T} est donné par la formule*

$$\text{Vol}(\mathcal{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^d \right)^n \tag{5.2.5}$$

- *ce volume est fini si et seulement si toutes les similitudes s_i sont strictement contractantes, et si la dimension de Hausdorff du réseau \mathcal{T} est strictement inférieure à d .*

Démonstration. Nous allons démontrer la proposition (5.2.5) en deux étapes. Tout d'abord, en notant $\Sigma_{p,j}^{n,\varepsilon} = [s]_{p,j}^n(\widehat{\Sigma}^\varepsilon)$, nous avons la réunion disjointe suivante

$$\mathcal{T}^\varepsilon = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{p^n-1} \Sigma_{p,j}^{n,\varepsilon}$$

Nous en déduisons alors (au sens du volume géométrique dans \mathbb{R}^d , en utilisant que l'arbre \mathcal{T}^ε est lui-même auto-similaire, donc vérifie en particulier le second point de (5.2.1)) :

$$\text{Vol}(\mathcal{T}^\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p^n-1} \text{Vol}(\Sigma_{p,j}^{n,\varepsilon}) \quad (5.2.6)$$

Or, en utilisant la relation liant $\Sigma_{p,j}^{n,\varepsilon}$ et $\widehat{\Sigma}^\varepsilon$, et en utilisant le fait que l'application d'une similitude de rapport α à un objet dans \mathbb{R}^d multiplie son volume par α^d , nous avons

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{T}^\varepsilon)}{\text{Vol}(\widehat{\Sigma}^\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p^n-1} [\alpha^d]_{p,j}^n \quad (5.2.7)$$

Nous utilisons alors le lemme 5.1.7 et la définition (5.2.4) pour en déduire (5.2.5). Nous pouvons en particulier remarquer que le volume obtenu ne dépend pas du choix de $\widehat{\Sigma}^\varepsilon$.

Pour prouver le second point, il est clair que si au moins une des similitudes s_i n'est pas strictement contractante, $\alpha_i \geq 1$, et dans ce cas le volume du réseau \mathcal{T} est infini. Supposons maintenant que toutes les similitudes s_i sont strictement contractantes. Nous pouvons voir que nous avons la relation suivante

$$\text{Vol}(\mathcal{T}) < \infty \iff \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i^d < 1 \quad (5.2.8)$$

Or, pour $\alpha_i < 1$, la fonction $x \mapsto \alpha_i^x$ est strictement décroissante, donc $f : x \mapsto \sum \alpha_i^x$ est aussi une fonction strictement décroissante. De plus, en utilisant la définition (5.2.3), nous avons $f(s) = 1$. Conclusion : $f(d) < 1 \iff d > s$. \square

Définition 5.2.12 (Réseau symétrique). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de générateur $\widehat{\Sigma}$ décrit par l'exemple 5.2.5 et de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ strictement contractantes de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$. Nous dirons que ce réseau est symétrique si et seulement si :

- α_i ne dépend pas de i ,
- L_i ne dépend pas de i .

5.2.2 Espaces de Sobolev et normes faibles

Dans cette section, nous introduisons des espaces fonctionnels à poids, avec des normes associées, sur les réseaux p -adiques auto-similaires, et nous donnons des propriétés sur ces normes.

5.2.2.1 Espaces à poids

Définition 5.2.13 (Poids). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire. On appellera poids μ sur \mathcal{T} toute fonction de \mathcal{T} dans \mathbb{R} strictement positive.

Définition 5.2.14 (Norme L^2 à poids). Soit \mathcal{T} un réseau auto-similaire de générateur $\widehat{\Sigma}$ et de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$. Supposons que $\widehat{\Sigma}$ soit une réunion finie disjointe d'arcs rectifiables $\widehat{\mathcal{C}}_i$, avec $1 \leq i \leq m$ (comme dans le cas de la figure 5.3 de l'exemple 5.2.5, où nous avons $m = p + 1$ et où les différents arcs sont donnés par $\widehat{\mathcal{C}}_1 = (M^*N^*)$, $\widehat{\mathcal{C}}_{i+2} = (M_iN^*)$, $0 \leq i < p$). En utilisant alors un argument de similarité, chaque $\Sigma_{p,j}^n$ est une réunion finie disjointe d'arcs rectifiables $\mathcal{C}_{i,j}^n$, avec $\mathcal{C}_{i,j}^n = [s]_{p,j}^n \widehat{\mathcal{C}}_i$. Nous utilisons sur chaque arc $\mathcal{C}_{i,j}^n$ son abscisse curviligne que nous notons x (et non pas $x_{i,j}^n$, pour ne pas alourdir la suite de cette définition). Nous considérons finalement un poids μ sur \mathcal{T} .

- Soit une fonction $u : \Sigma_{p,j}^n \rightarrow \mathbb{C}$. On dira que cette fonction est dans l'espace $L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)$ si et seulement si la quantité suivante

$$\|u\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)} := \left(\sum_{i=1}^m \int_{C_{i,j}^n} \mu(x) |u(x)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \quad (5.2.9)$$

est finie, où $d\sigma_i(x)$ désigne la mesure de l'abscisse curviligne associée à l'arc $C_{i,j}^n$. Par convention, on notera

$$\int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \|u\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \quad (5.2.10)$$

- Soit une fonction $u : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$. On dira que cette fonction est dans l'espace $L_\mu^2(\mathcal{T})$ si et seulement si :

1. la restriction de u à chaque $\Sigma_{p,j}^n$ est dans l'espace $L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)$,
2. la quantité suivante

$$\|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})} := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{p^n-1} \|u\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \right)^{1/2} \quad (5.2.11)$$

est finie. Par convention, on notera

$$\int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 \quad (5.2.12)$$

- On notera $L_{\mu,\text{loc}}^2(\mathcal{T})$ l'ensemble des fonctions u définies sur \mathcal{T} telles que la restriction de u à chaque $\Sigma_{p,j}^n$ soit dans l'espace $L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)$.

Remarque 5.2.15. Nous pouvons déduire que l'appartenance d'une fonction "régulière" est conditionnée par son comportement au voisinage de l'"infini", de la même manière que l'appartenance d'une fonction à l'espace $L^2(\mathbb{R}_+)$ est conditionnée par la limite de la norme $L^2(]0, n[)$ de cette fonction.

Définition 5.2.16 (Espace et norme \mathcal{H}_μ^1 sur le réseau). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire, soit μ un poids défini sur \mathcal{T} , et soit M^* un point de \mathcal{T} . Nous définissons l'espace $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ l'espace

$$\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \{u \in L_{\text{loc}}^2(\mathcal{T}) \cap \mathcal{C}^0(\mathcal{T}) \text{ tel que } u' \in L_\mu^2(\mathcal{T})\} \quad (5.2.13)$$

où, sur chaque arc définissant \mathcal{T} , u' désigne la dérivée de u par rapport à l'abscisse curviligne. Cet espace est un espace de Hilbert. Les normes et semi-normes associées à cet espace sont

$$\|u\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})}^2 = |u(M^*)|^2 + \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 \quad (5.2.14)$$

$$\|u\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} = \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})} \quad (5.2.15)$$

Nous verrons dans la section 5.3.2 que cet espace est adapté à la résolution d'un problème généralisé de Laplace posé sur \mathcal{T} .

Remarque 5.2.17. En utilisant l'inégalité de la moyenne, et à une constante multiplicative près sur la norme (5.2.14), la topologie de l'espace $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ ne dépend pas du choix du point M^* .

Remarque 5.2.18. Une fonction particulière qui appartient toujours à l'espace $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ (même si cette fonction n'appartient pas à l'espace $L_\mu^2(\mathcal{T})$) est la fonction $\mathbb{1}$, qui vaut 1 sur \mathcal{T} .

Définition 5.2.19 (Compacité du support d'une fonction). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire. Une fonction $u : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ sera dite à support compact sur \mathcal{T} si et seulement si il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > n_0$, la restriction de u à \mathcal{G}^n est nulle. Dans ce cas, nous dirons que la fonction u est à support dans \mathcal{T}^{n_0} .

Remarque 5.2.20. Nous pouvons voir que la notion de compacité introduite dans la définition 5.2.19 est différente de la notion de compacité dans \mathbb{R}^d - dès que toutes les similitudes sont strictement contractantes, le réseau \mathcal{T} est contenu dans une boule de volume finie de \mathbb{R}^d .

Définition 5.2.21 (Espaces $\mathcal{H}_{\mu,c}^1$ et $\mathcal{H}_{\mu,0}^1$ sur le réseau). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique, soit μ un poids sur \mathcal{T} , et soit M^* un point de \mathcal{T} .

1. On note $\mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ le sous-espace des fonctions de $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ qui sont à support compact, au sens de la définition 5.2.19.
2. On note $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ le sous-espace des fonctions de $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ correspondant à la fermeture de $\mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ pour la norme (5.2.14).

Afin de pouvoir définir une notion de trace de fonction à l'infini pour les espaces $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$, il est important de savoir si les fonctions à support compact forment un espace dense ou non. Nous pouvons formuler le problème de manière plus explicite :

Question 5.2.22. A quelle condition a-t-on $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$? Lorsque ce n'est pas le cas, peut-on caractériser l'espace $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$?

La réponse à la question 5.2.22 est suffisamment longue pour faire l'objet de plusieurs paragraphes - en l'occurrence les sections 5.3 et 5.4. De plus, nous nous limiterons dans ces sections au cas de poids auto-similaires, qui sont définis par la section ci-dessous.

5.2.2.2 Espaces à poids auto-similaires

Ici, nous supposons de plus que le poids μ que nous choisissons pour définir l'espace $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ possède également une propriété d'auto-similarité donnée par la définition 5.2.23 qui suit. Cela nous permettra de donner des propriétés supplémentaires sur la topologie de cet espace. En pratique (voir l'exemple 5.2.24), les poids naturels que nous définissons sur des réseaux p -adiques auto-similaires sont eux-mêmes auto-similaires.

Définition 5.2.23 (Poids auto-similaire). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$, et soit μ un poids sur \mathcal{T} . Nous dirons que μ est un poids auto-similaire si et seulement si il existe un p -uplet de nombres strictement positifs $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1})$ tels que

$$\mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \mu(\mathbf{x}), \quad \forall 0 \leq i < p, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{T} \quad (5.2.16)$$

On dira dans ce cas que μ est un poids auto-similaire de rapports de similarité $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1})$.

Exemple 5.2.24 (Réseau d -géométrique). Reprenons la géométrie de l'exemple 5.2.5. En considérant le segment $[M^*N^*]$ comme la limite d'un rectangle (ou d'un cylindre) de largeur (ou de diamètre) ε , et en considérant chaque segment $[N^*M_i]$ comme la limite d'un rectangle (ou d'un cylindre) de largeur (ou de diamètre) $\alpha_i \varepsilon$, le poids naturel (au sens de l'étude du chapitre 3) est le poids μ satisfaisant :

- $\mu = 1$ sur le segment $[M^*N^*]$,
- $\mu = \alpha_i^{d-1}$ sur chaque segment N^*M_i ,
- μ est auto-similaire de rapports de similarité $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1})$, avec $\mu_i = \alpha_i^{d-1}$ pour tout $0 \leq i < p$.

où d désigne la dimension en espace dans lequel est plongé le réseau. De manière générale, on appellera réseau (p -adique) d -géométrique tout couple (\mathcal{T}, μ) tel que \mathcal{T} est un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_i)_{0 \leq i < p}$ de rapports respectifs $(\alpha_i)_{0 \leq i < p}$ et μ est un poids auto-similaire de rapports de similarité $(\alpha_i^{d-1})_{0 \leq i < p}$.

Proposition 5.2.25. *Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$, et soit μ un poids auto-similaire de rapports de similarité $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1})$ sur \mathcal{T} . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$, nous avons, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}$:*

$$\mu([s]_{p,j}^n(\mathbf{x})) = [\mu]_{p,j}^n \mu(\mathbf{x}) \quad (5.2.17)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$. En utilisant la définition 5.1.1 à la fois pour le groupe des similitudes directes muni de la loi de composition (pour traiter les s_i) et pour le groupe des nombres réels strictements positifs muni de la loi de multiplication (pour traiter les μ_i), et en utilisant la relation (5.2.16) qui caractérise l'auto-similarité du poids μ , nous avons, en notant $[j_{n-1}j_{n-2} \dots j_1j_0]_p$ l'écriture en base p du nombre j :

$$\begin{aligned} \mu([s]_{p,j}^n(\mathbf{x})) &= \mu(s_{j_0}(s_{j_1}(\dots(s_{j_{n-1}}(\mathbf{x})))))) \\ &= \mu_{j_0} s_{j_1}(\dots(s_{j_{n-1}}(\mathbf{x}))) \\ &= \vdots \\ &= \mu_{j_0} \mu_{j_1} \dots \mu_{j_{n-1}} \mu(\mathbf{x}) \\ &= [\mu]_{p,j}^n \mu(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Lemme 5.2.26. *Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$, et soit μ un poids auto-similaire de rapports de similarité $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1})$ sur \mathcal{T} . Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$, et soit u une fonction définie sur $\Sigma_{p,j}^n$. Notons alors \hat{u} la fonction définie sur $\widehat{\Sigma}$ par*

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = u([s]_{p,j}^n(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \widehat{\Sigma} \quad (5.2.18)$$

Alors, en supposant que les quantités ci-dessous aient un sens, $\forall m \in \mathbb{N}$, en notant $u^{(m)}$ la dérivée m -ième de u (au sens de l'abscisse curviligne sur chaque arc de \mathcal{T}) :

$$\left\| u^{(m)} \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 = [\mu \alpha^{1-2m}]_{p,j}^n \left\| \hat{u}^{(m)} \right\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2 \quad (5.2.19)$$

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que la dérivée m ème de u soit dans $L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)$. Alors, par compositions, la dérivée m ème de \hat{u} est dans $L_\mu^2(\widehat{\Sigma})$, et nous avons

$$\hat{u}^{(m)}(\mathbf{x}) = \left([\alpha]_{p,j}^n \right)^m u^{(m)}([s]_{p,j}^n(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \widehat{\Sigma} \quad (5.2.20)$$

Nous faisons le changement de variable $x = [s]_{p,j}^n(\mathbf{x})$ pour nous ramener au domaine $\Sigma_{p,j}^n$, et l'intégration de la relation (5.2.20) élevée au carré donne

$$\left\| u^{(m)} \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 = [\alpha^{-2m}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(x) \left| \hat{u}^{(m)}([s]_{p,j}^{-n}(x)) \right| dx$$

Pour finir, nous utilisons le changement $\mathbf{x} = [s]_{p,j}^n(x)$, $d\mathbf{x} = [\alpha]_{p,j}^n dx$, et nous utilisons la proposition 5.2.25 pour ramener le poids μ sur $\widehat{\Sigma}$, afin d'obtenir (5.2.19). \square

5.2.3 Fonctions auto-similaires

Le lemme 5.2.26 est intéressant dès lors qu'on étudie des fonctions u qui présentent le même genre de propriétés que les poids μ . Nous allons détailler dans cette section ce que nous appelons fonctions auto-similaires et les propriétés que nous pouvons déduire de ce type de fonctions.

Définition 5.2.27 (Fonction auto-similaire). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$, et soit $u : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$. Nous dirons que la fonction u est auto-similaire s'il existe un p -uplet de nombres complexes $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1})$ tels que

$$u(s_i(\mathbf{x})) = r_i u(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \quad \forall 0 \leq i < p \quad (5.2.21)$$

Nous dirons dans ce cas que u est une fonction auto-similaire de rapports de similarité $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1})$.

Proposition 5.2.28. Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$, et soit $u : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction auto-similaire de rapports de similarité $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$, nous avons

$$u([s]_{p,j}^n(\mathbf{x})) = [r]_{p,j}^n u(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{T} \quad (5.2.22)$$

Démonstration. La preuve de cette proposition est identique à la preuve de la proposition 5.2.25. \square

Lemme 5.2.29 (Comportement des normes à poids d'une fonction auto-similaire). Soit \mathcal{T} un réseau auto-similaire de générateur $\widehat{\Sigma}$ et de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$, soit μ un poids auto-similaire de rapports de similarité $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1})$ sur \mathcal{T} , et soit $u : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction auto-similaire de rapports de similarité $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$, nous avons, en supposant que les quantités ci-dessous aient un sens :

$$\left\| u^{(m)} \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 = [\mu |r^2| \alpha^{1-2m}]_{p,j}^n \left\| u^{(m)} \right\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2 \quad (5.2.23)$$

où $[\mu |r^2| \alpha^{1-2m}]_{p,j}^n$ est le produit des $\mu_{j_i} |r_{j_i}^2| \alpha_{j_i}^{1-2m}$, où $[j_{n-1} \dots j_1 j_0]$ est l'écriture en base p du nombre j en utilisant n chiffres.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$ fixés. En utilisant la proposition 5.2.28, nous notons $\hat{u} = [r]_{p,j}^n u$, nous appliquons alors le lemme 5.2.26 avec cette fonction, et nous utilisons la proposition 5.1.8 pour commuter les écritures des $[\cdot]_{p,j}^n$ dans \mathbb{R}_+^* . \square

Le théorème suivant donne un critère géométrique d'appartenance ou de non-appartenance d'une fonction auto-similaire aux espaces $L_\mu^2(\mathcal{T})$ et $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$.

Théorème 5.2.30 (Théorème d'appartenance aux espaces à poids). Soit \mathcal{T} un réseau auto-similaire de générateur $\widehat{\Sigma}$ et de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$ et soit μ un poids auto-similaire de rapports de similarité $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1})$ sur \mathcal{T} .

1. Soit $u : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction auto-similaire de rapports de similarité $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1})$ sur \mathcal{T} , dont la restriction à $\widehat{\Sigma}$ est dans $L_\mu^2(\widehat{\Sigma})$. Alors $u \in L_\mu^2(\mathcal{T})$ si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i |r_i|^2 \alpha_i < 1 \quad \text{ou} \quad u \text{ est nulle presque partout} \quad (5.2.24)$$

2. Soit $u : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction auto-similaire de rapports de similarité $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1})$ sur \mathcal{T} , dont la restriction à $\widehat{\Sigma}$ est dans $\mathcal{H}_\mu^1(\widehat{\Sigma})$. Alors $u \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i |r_i|^2 \alpha_i^{-1} < 1 \quad \text{ou} \quad u = \lambda \mathbf{1}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (5.2.25)$$

Démonstration. Nous allons démontrer en détail la condition (5.2.24) (la condition (5.2.25) se démontre de la même manière). Nous utilisons le lemme 5.2.29 pour $m = 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour chaque $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$, et en utilisant que les domaines $\Sigma_{p,j}^n$ sont d'intersections vides deux à deux, nous obtenons

$$\|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{p^n-1} \|u\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{p^n-1} [\mu |r|^2 \alpha]_{p,j}^n \|u\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2 \quad (5.2.26)$$

Nous pouvons alors extraire $\|u\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2$ de la double somme, et utiliser la proposition 5.1.7 avec $a_i = \mu_i |r_i|^2 \alpha_i$. Nous obtenons alors

$$\|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 = \|u\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i |r_i|^2 \alpha_i \right)^n \quad (5.2.27)$$

Si u est nulle presque partout, la somme fait 0, donc la fonction est dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$. Sinon, par auto-similarité, u n'est pas nulle presque partout sur $\widehat{\Sigma}$, et la relation $\|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})} < \infty$ équivaut à la convergence de la somme des termes d'une suite géométrique de raison

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i |r_i|^2 \alpha_i$$

ce qui explique le critère (5.2.24). □

5.3 Densité des fonctions à support compact

Dans cette section, nous allons donner des éléments de réponse à la première partie de la question 5.2.22, à savoir à quelle condition nous avons $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, dans le cas de la géométrie de l'exemple 5.2.5 et dans le cas de poids auto-similaires de rapports de similarité $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1})$. Nous ne considérons pas nécessairement le cas de l'arbre d -géométrique.

Nous allons répondre en deux parties : tout d'abord en démontrant une relation équivalente à la relation $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ (paragraphe 5.3.1), puis en caractérisant cette relation équivalente en utilisant un problème de Laplace auxiliaire (paragraphe 5.3.2).

5.3.1 $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$: une première CNS implicite

La condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème 5.3.1. *Nous avons l'équivalence suivante*

$$\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \iff \mathbf{1} \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \quad (5.3.1)$$

Démonstration. Cette démonstration reprend l'idée de la démonstration d'un théorème équivalent dans un papier récent de B. Maury, D. Salort et C. Vannier [MSV09]. Le sens $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathbf{1} \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ est trivial puisque $\mathbf{1} \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$. Pour le sens $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \Leftarrow \mathbf{1} \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, soit $u \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$, et montrons qu'il existe une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} = 0 \quad (5.3.2)$$

Par hypothèse, il existe une suite de fonctions $(\mathbf{1}_q)_{q \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{1} - \mathbf{1}_q\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} = 0 \quad (5.3.3)$$

L'idée est de construire une suite de fonctions $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui se comporte comme u sur les n premières générations de \mathcal{T} , et qui se comporte comme un des $\mathbf{1}_q$ au-delà. Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous construisons une suite $(u_q^n)_{q \in \mathbb{N}}$ à dérivée dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$ de la manière suivante :

$$u_q^n(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{T}^n \\ u([M]_{p,j}^{n+1}) \mathbf{1}_q(\mathbf{x}) / \max(1/2, \mathbf{1}_q([M]_{p,j}^{n+1})), & x \in [s]_{p,j}^{n+1}(\mathcal{T}) \end{cases} \quad (5.3.4)$$

Notons que cette fonction est bien définie : nous pouvons toujours décomposer un réseau p -adique auto-similaire comme la réunion de sa troncature à la $n^{\text{ème}}$ génération et l'ensemble des sous-arbres partant de la $(n+1)^{\text{ème}}$ génération. De plus, cette fonction à support compact inclus dans $\text{supp}(\mathbf{1}_q) \cup \mathcal{T}^n$.

Comme $\mathbf{1}_q$ converge vers $\mathbf{1}$ en norme $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$, et en utilisant la remarque 5.2.17, nous avons une convergence point par point, donc pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $q_1^n \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq q_1^n$,

$$\max(1/2, \mathbf{1}_q([M]_{p,j}^{n+1})) = \mathbf{1}_q([M]_{p,j}^{n+1}), \quad \forall j \leq p^{n+1} - 1 \quad (5.3.5)$$

Nous obtenons ainsi la continuité de la fonction u_q^n en chaque point $[M]_{p,j}^{n+1}$, et comme $\mathbf{1}_q \in \mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$, nous avons $u_q^n \in \mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ pour $q \geq q_1^n$.

De plus, comme sur \mathcal{T}^n , nous avons $u_q^n = u$, nous avons

$$\|u_q^n - u\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})}^2 = \int_{\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n} \mu(\mathbf{x}) |(u_q^n)'(\mathbf{x}) - u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

Nous majorons brutalement cette relation de manière à avoir

$$\|u_q^n - u\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})}^2 \leq 2 \int_{\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + 2 \int_{\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n} \mu(\mathbf{x}) |(u_q^n)'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (5.3.6)$$

Puisque u' est dans l'espace $L_\mu^2(\mathcal{T})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$:

$$\int_{\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \varepsilon \quad (5.3.7)$$

Le premier terme du membre de droite de (5.3.6) est alors majoré par 2ε pour $n \geq n_0$ en utilisant (5.3.7). Pour majorer le second terme, il suffit de constater que

$$\int_{\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n} \mu(\mathbf{x}) |(u_q^n)'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \sum_{j=0}^{p^{n+1}-1} 4 \left| u([M]_{p,j}^{n+1}) \right|^2 \|\mathbf{1}_q'\|_{[s]_{p,j}^{n+1}(\mathcal{T})}^2 \quad (5.3.8)$$

Puisque $\|\mathbb{1}'\|_{L^2_\mu([s]_{p,j}^{n+1}(\mathcal{T}))} = 0$, nous utilisons la majoration $\|\mathbb{1}'_q\|_{L^2_\mu([s]_{p,j}^{n+1}(\mathcal{T}))} \leq \|\mathbb{1} - \mathbb{1}_q\|_{\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T})}$ (le membre de droite ne dépend plus de n et donc ne dépend plus du choix de n_0) ; en utilisant alors l'hypothèse (5.3.3), à n fixé, il existe $q_2^n \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq q_2^n$, nous avons

$$\|\mathbb{1} - \mathbb{1}_q\|_{\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T})}^2 \sum_{j=0}^{p^{n+1}-1} 4 \left| u([M]_{p,j}^{n+1}) \right|^2 \leq \varepsilon \tag{5.3.9}$$

Appelons maintenant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = u_{\max(q_1^n, q_2^n)}^n$ (nous faisons une extraction de la suite $(u_q^n)_{q \in \mathbb{N}}$ de manière à avoir nos majorations (5.3.8) et (5.3.9) vraies, tout en ne gardant qu'un seul indice d'indexation). En utilisant (5.3.7), (5.3.8) et (5.3.9) dans l'inégalité (5.3.6), nous avons, pour $n \geq n_0$:

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T})}^2 \leq 4\varepsilon$$

Nous obtenons alors le résultat escompté. □

Le théorème 5.3.1 donne un critère implicite d'égalité entre les espaces $\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T})$ et $\mathcal{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T})$. La proposition suivante permet d'avoir une condition suffisante plus explicite :

Proposition 5.3.2. *Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_i)_{0 \leq i < p}$ de rapports de similarité $(\alpha_i)_{0 \leq i < p}$, et soit μ un poids auto-similaire de rapports de similarité $(\mu_i)_{0 \leq i < p}$ sur \mathcal{T} .*

Supposons que $\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} \leq 1$, alors la fonction $\mathbb{1}$ est dans $\mathcal{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T})$.

Démonstration. Il suffit d'exhiber une famille de fonctions $(\mathbb{1}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}^1_{\mu,c}(\mathcal{T})$ telle que

$$\|\mathbb{1}_n - \mathbb{1}\|_{\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T})} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Prenons le cas "bateau" $p = \mu = \alpha = 1$ (donc le réseau \mathcal{T} est assimilable à la demi-droite \mathbb{R}_+ , et le point $[M]_{p,0}^n$ est assimilable au point d'abscisse n) : une approximation naturelle de la fonction $\mathbb{1}$ est la fonction $\mathbb{1}_n$ qui vaut 1 sur $[0, n[$, $(2n - x)/n$ sur $[n, 2n[$ et 0 sur $[2n, +\infty[$ (donnée par la figure 5.5). Cette fonction est bien continue, et tend bien vers la fonction $\mathbb{1}$ en semi-norme $H^1(\mathbb{R}_+)$.

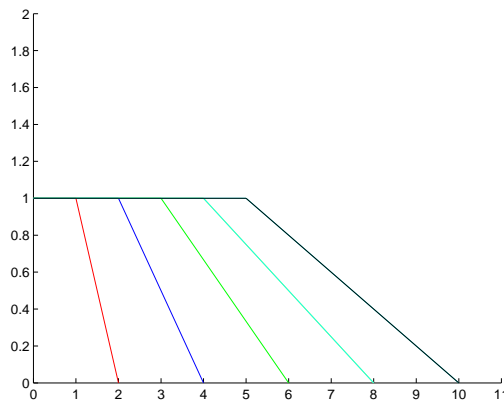


FIGURE 5.5 – Tracé de la fonction $\mathbb{1}_n$ pour $n = 1$ (rouge) à $n = 5$ (noir)

Soit $\widehat{\Phi}$ une fonction de $\mathcal{H}_\mu^1(\widehat{\Sigma})$ telle que $\widehat{\Phi}(M^*) = 1$ et $\widehat{\Phi}(M_i) = 0$ pour tout $0 \leq i < p$. À partir de cette fonction, nous construisons la fonction $\mathbb{1}_n$ continue par

$$\mathbb{1}_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Sigma_{p,j}^l, l < n, 0 \leq j \leq p^l - 1 \\ 0, & \mathbf{x} \in \Sigma_{p,j}^l, l \geq 2n, 0 \leq j \leq p^l - 1 \\ \frac{2n-l-1}{n} + \frac{1}{n} \widehat{\Phi}([s]_{p,j}^{-l}(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \Sigma_{p,j}^l, n \leq l < 2n, 0 \leq j \leq p^l - 1 \end{cases} \quad (5.3.10)$$

La continuité de cette fonction aux points $[M]_{p,j}^n$ est assurée par le choix de $\widehat{\Phi}$. Nous pouvons constater que la famille de fonctions $\mathbb{1}_n$ exhibée ci-dessus est construite de manière symétrique, même si le réseau n'est pas équilibré. Nous pouvons également voir que cette fonction est à support compact et a pour support \mathcal{T}^{2n} .

En appliquant le lemme 5.2.26 pour $m = 1$ avec la fonction $\hat{u} = n^{-1}\widehat{\Phi}$, nous avons

$$\|\mathbb{1}'_n\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^l)}^2 = \frac{1}{n^2} [\mu\alpha^{-1}]_{p,j}^l \|\widehat{\Phi}\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2, \quad n \leq l < 2n \quad (5.3.11)$$

En faisant la somme sur tous les $\Sigma_{p,j}^l$ et en utilisant (5.3.11), nous obtenons

$$\|\mathbb{1}_n - \mathbb{1}\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})}^2 = \frac{1}{n^2} \|\widehat{\Phi}\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2 \sum_{l=n}^{2n-1} \left(\sum_{j=0}^{p^l-1} [\mu\alpha^{-1}]_{p,j}^l \right)$$

qui devient, grâce à la proposition 5.1.7

$$\|\mathbb{1}_n - \mathbb{1}\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})}^2 = \frac{1}{n^2} \|\widehat{\Phi}\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2 \sum_{l=n}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} \right)^l \quad (5.3.12)$$

Sous l'hypothèse $\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} \leq 1$, nous pouvons majorer le membre de droite de (5.3.12) par n^{-1} , d'où le résultat. \square

Remarque 5.3.3. Dans le cas d'une inégalité stricte, il est possible de prendre une fonction qui passe de 1 à 0 en une seule génération au lieu de prendre une fonction qui passe de 1 à 0 en n générations.

Remarque 5.3.4. Le résultat du théorème 5.3.1 ne suppose pas que le poids μ choisi soit auto-similaire. Dans le cas général, nous ne savons pas encore caractériser cette condition nécessaire et suffisante (cette partie fait l'objet d'une collaboration avec Serge Nicaise). Dans le cas d'un poids auto-similaire, nous avons la proposition 5.3.2 qui caractérise partiellement l'identité $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. Nous allons finir de caractériser cette identité dans le paragraphe suivant.

5.3.2 Étude d'un problème de Laplace auxiliaire et CNS explicite

Le théorème 5.3.1 donne déjà un élément de réponse à la première partie de la question 5.2.22, du moment que l'on sait caractériser l'appartenance ou non de $\mathbb{1}$ à l'espace $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. Nous allons étudier dans cette section un problème de Laplace auxiliaire pour permettre d'expliciter une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathbb{1} \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$.

5.3.2.1 Problème avec conditions de “Neumann” et de “Dirichlet” à l’infini

Nous considérons les deux problèmes suivants

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_N) \quad & \text{Trouver } u \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \text{ telle que } u(M^*) = 1 \text{ et} \\
 & \int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) u'(\mathbf{x}) \overline{v'(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), v(M^*) = 0 \\
 (\mathcal{P}_D) \quad & \text{Trouver } u \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \text{ telle que } u(M^*) = 1 \text{ et} \\
 & \int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) u'(\mathbf{x}) \overline{v'(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}), v(M^*) = 0
 \end{aligned}$$

où le poids μ que l’on considère est continu sauf aux points $[N]_{p,j}^n$.

Le problème (\mathcal{P}_N) sera appelé problème de Laplace généralisé (à cause du poids) avec condition de “Neumann” (homogène) à l’infini, et le problème (\mathcal{P}_D) sera appelé problème de Laplace généralisé avec condition de “Dirichlet” à l’infini (par analogie à ce qui se passe dans le cas $p = d = 1$, i.e. lorsque le réseau est identifiable à un segment ou à une demi-droite).

Remarque 5.3.5. Quand nous parlons de condition à l’infini, il s’agit de l’infini au sens de la génération \mathcal{G}^n du réseau \mathcal{T} sur laquelle nous nous trouvons - si nous voulons que le réseau existe au sens de la géométrie dans \mathbb{R}^d , il faut que son volume soit fini (sauf cas très particuliers).

Proposition 5.3.6. *Les problèmes (\mathcal{P}_N) et (\mathcal{P}_D) sont bien posés.*

Démonstration. La preuve de ce théorème est une application directe du théorème de Lax-Milgram (une fois que nous avons fait un relèvement consistant à prendre la fonction $f \in \mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ qui est affine sur M^*N^* , qui vaut 1 en M^* , 0 en N^* est qui est nulle sur $\mathcal{T} \setminus (M^*N^*)$). Introduisons les espaces fonctionnels suivants

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_\mu(\mathcal{T}) &= \{v \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), v(M^*) = 0\} \\
 \mathcal{V}_{\mu,0}(\mathcal{T}) &= \{v \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}), v(M^*) = 0\}
 \end{aligned}$$

Ce sont deux sous-espaces fermés de $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ donc ce sont des espaces de Hilbert. Sur ces espaces, la norme (5.2.14) est égale à la semi-norme (5.2.15). Sur ces espaces, la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) u'(\mathbf{x}) \overline{v'(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

est le produit scalaire associé à la semi-norme (5.2.15). La conclusion est immédiate. \square

Proposition 5.3.7 (triviale). *$\mathbb{1}$ est l’unique solution du problème (\mathcal{P}_N) .*

Proposition 5.3.8. *$\mathbb{1}$ est solution du problème (\mathcal{P}_D) si et seulement si $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$.*

Démonstration. Si $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, alors les problèmes (\mathcal{P}_N) et (\mathcal{P}_D) sont identiques, et ont la même solution $\mathbb{1}$ d’après la proposition 5.3.7. Inversement, si $\mathbb{1}$ est solution du problème (\mathcal{P}_D) , alors $\mathbb{1} \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, et le théorème 5.3.1 donne alors $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. \square

Maintenant, nous particularisons le poids que nous prenons sur \mathcal{T} . Jusqu’à la fin de la section 5.3, nous nous plaçons sous l’hypothèse d’un poids μ auto-similaire. Nous allons voir que cette particularisation nous donne des propriétés supplémentaires sur la solution du problème (\mathcal{P}_D) .

Lemme 5.3.9. *Supposons maintenant que le poids μ est auto-similaire. Alors la solution du problème (\mathcal{P}_D) est elle-même auto-similaire.*

Démonstration. Nous prenons des fonctions tests $v \in \mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ (par définition de l'ensemble $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, $\mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ est dense dans $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$). Le problème (\mathcal{P}_D) peut se réécrire formellement sous la forme : trouver $u \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ telle que

$$\begin{cases} (\mu u)' = 0 & \text{dans } \mathcal{T} \\ u(M^*) = 1 \end{cases} \quad (5.3.13)$$

La première ligne de (5.3.13) signifie que u vérifie l'équation $(\mu u)' = 0$ sur chaque segment (MN) et vérifie des conditions de Kirchhoff classiques en chaque point $[N]_{p,j}^n$ qui sont :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mu_{j,i}^n (u_{j,i}^n)' ([N]_{p,j}^n) = \mu_j^{n,*} (u_j^{n,*})' ([N]_{p,j}^n) \quad (5.3.14)$$

où $u_{j,i}^n$ est la restriction de u au segment $[[N]_{p,j}^n [M]_{p,n+1}^{pj+i}]$, pour $0 \leq i < p$; et $u_j^{n,*}$ est la restriction de u au segment $[[M]_{p,j}^n [N]_{p,j}^n]$ (voir la figure 5.6). Nous condenserons (5.3.14) sous la forme

$$[\mu u]' ([N]_{p,j}^n) = 0 \quad (5.3.15)$$

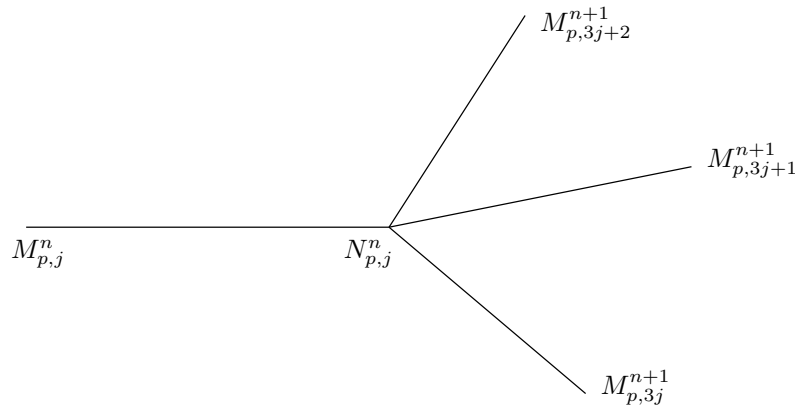


FIGURE 5.6 – Configuration de $\Sigma_{p,j}^n$

. Nous savons d'après la proposition 5.3.6 que le problème (5.3.13) est bien posé. Soit $0 \leq i < p$, et notons $u_i := u \circ s_i$, définie de \mathcal{T} dans \mathbb{C} . Nous avons alors

$$(\mu u_i)' = \alpha_i^2 \mu_i^{-1} (\mu u)'(s_1(\bullet)) = 0$$

u_i vérifie donc la première ligne de (5.3.13), et nous avons $u_i(M^*) = u(s_i(M^*)) = u(M_i)$. Par unicité du problème (5.3.13), nous déduisons que $u_i(\mathbf{x}) = u(M_i)u(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$, soit

$$u(s_i(\mathbf{x})) = u(M_i)u(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}$$

ce qui n'est rien d'autre que la définition de l'auto-similarité d'une fonction. \square

5.3.2.2 Réduction à un domaine borné

Le lemme 5.3.9 est primordial dans le sens où, en utilisant le fait que pour toute fonction auto-similaire u de rapports de similarité $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1})$, avec $r_i = u(M_i)$, nous avons $u'(s_i(\mathbf{x})) = r_i \alpha_i^{-1} u'(\mathbf{x})$, la résolution de l'équation de Laplace sur \mathcal{T} avec condition homogène à l'infini peut se ramener à la résolution de l'équation de Laplace sur $\widehat{\Sigma}$, modulo l'écriture des conditions de bord induisant l'auto-similarité de la solution cherchée, que nous appellerons conditions d'auto-similarité. Le problème peut alors se réécrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathcal{H}_\mu^1(\widehat{\Sigma}) \text{ tel que :} \\ (\mu u)'(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in (M^* N^*) \text{ ou } \mathbf{x} \in (N^* M_i), \quad 0 \leq i < p \\ [\mu u'](N^*) = 0, \quad (\text{loi de Kirchhoff donnée par (5.3.15)}) \\ u(M^*) = 1 \\ u'(M_i) = u'(M^*) u(M_i) \alpha_i^{-1} \\ \text{(5.2.25) est satisfait, i.e. } \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i |u(M_i)|^2 \alpha_i^{-1} < 1 \quad \text{ou } u = \lambda \mathbf{1}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \right. \quad (5.3.16)$$

La dernière ligne de (5.3.16) revient à dire que la reconstruction de la solution sur le réseau entier \mathcal{T} est dans l'espace $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$. Plus précisément :

Définition 5.3.10 (Extension sur le réseau). Soit u une fonction de $\mathcal{H}_\mu^1(\widehat{\Sigma})$. Nous définissons l'extension auto-similaire de u sur \mathcal{T} , et nous notons $P_{\mathcal{T}}(u)$, la fonction définie sur \mathcal{T} par

$$P_{\mathcal{T}}(u)(\mathbf{x}) = [r]_{p,j}^n u([s]_{p,j}^{-n}(\mathbf{x})) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Sigma_{p,j}^n \quad (5.3.17)$$

où $r_i = u(M_i)$, pour $0 \leq i < p$.

Nous pouvons constater que la fonction $P_{\mathcal{T}}(u)$ définie par (5.3.17) est une fonction continue sur \mathcal{T} , y compris en chaque point $[M]_{p,j}^n$, que cette fonction est auto-similaire de rapports de similarité $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1})$. De plus, la restriction de la fonction $P_{\mathcal{T}}(u)$ au domaine $\widehat{\Sigma}$ est exactement la fonction u . Il nous reste donc à caractériser la norme $\|P_{\mathcal{T}}(u)\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})}$ pour déterminer l'appartenance ou non de la fonction $P_{\mathcal{T}}(u)$ à l'espace $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$.

Nous allons maintenant énoncer deux lemmes techniques qui nous permettront de dire que les problèmes (\mathcal{P}_N) et (\mathcal{P}_D) d'une part, et le problème (5.3.16) d'autre part, sont équivalents.

Lemme 5.3.11. Soit $u \in \mathcal{H}_\mu^1(\widehat{\Sigma})$ tel que la condition (5.2.25) soit satisfaite. Alors $P_{\mathcal{T}}(u) \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ (la réciproque a déjà été énoncée par le théorème 5.2.30).

Démonstration. Si u est constante sur $\widehat{\Sigma}$, alors $P_{\mathcal{T}}(u)$ est un multiple de la fonction $\mathbf{1}$, donc appartient à l'espace $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$. Supposons maintenant que u ne soit pas constante. En appelant $r_i = u(M_i)$, et en utilisant le lemme 5.2.29 avec $m = 1$, nous avons

$$\|P_{\mathcal{T}}(u)'\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 = [\mu |r|^2 \alpha^{-1}]_{p,j}^n \|P_{\mathcal{T}}(u)'\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2 = [\mu |r|^2 \alpha^{-1}]_{p,j}^n \|u'\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2$$

Nous concluons de la même manière que la conclusion de la preuve du théorème 5.2.30 □

Lemme 5.3.12. Nous avons l'équivalence suivante :

$$u \text{ est solution de } (\mathcal{P}_N) \text{ ou } (\mathcal{P}_D) \iff u|_{\widehat{\Sigma}} \text{ est solution de (5.3.16)}$$

Démonstration. Le sens “ \Rightarrow ” est quasiment trivial. En effet, si u est solution de (\mathcal{P}_N) ou (\mathcal{P}_D) , alors la restriction de u à $\widehat{\Sigma}$ vérifie les trois premières lignes du problème (5.3.16). Le lemme 5.3.9 nous dit que la solution est auto-similaire, ce qui nous donne les lignes 4 et 5 de (5.3.16). Démontrons maintenant le sens “ \Leftarrow ”. Soit u solution du problème (5.3.16). En utilisant le lemme 5.3.11, la fonction reconstruite $P_{\mathcal{T}}(u)$ appartient à l’espace $\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$. De plus, comme u vérifie les deux premières lignes de (5.3.16), $P_{\mathcal{T}}(u)$ est solution de l’équation de Laplace sur chaque $\Sigma_{p,j}^n$ avec condition de Kirchhoff en chaque $[N]_{p,j}^n$. Nous multiplions alors $P_{\mathcal{T}}(u)$ par une fonction test $v \in \mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ et nous faisons des intégrations par parties. Nous obtenons alors

$$\int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) P_{\mathcal{T}}(u)'(\mathbf{x}) \overline{v'(\mathbf{x})} d\mathbf{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{j=0}^{p^n-1} [\mu P_{\mathcal{T}}(u)' \overline{v}]([M]_{p,j}^n) = 0$$

Pour retrouver (\mathcal{P}_N) ou (\mathcal{P}_D) , il faut et il suffit que chaque saut en $[M]_{p,j}^n$ s’annule. Or, les fonctions μ et v sont continues d’une part, et le saut de $P_{\mathcal{T}}(u)'$ est nul d’autre part grâce à la quatrième ligne de (5.3.16). \square

Remarque 5.3.13. A ce stade, l’indétermination qui nous reste est : soit u une solution de (5.3.16). $P_{\mathcal{T}}(u)$ est-elle solution de (\mathcal{P}_N) ou (\mathcal{P}_D) ?

Lemme 5.3.14. *Le problème (5.3.16) est équivalent au problème suivant : trouver $u \in \mathcal{H}_{\mu}^1(\widehat{\Sigma})$ et $(r_0, r_1, r_{p-1}, \lambda) \in \mathbb{C}^{p+1}$ tels que*

$$(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}}) \left\{ \begin{array}{l} (\mu u)'(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in (M^* N^*) \text{ ou } \mathbf{x} \in (N^* M_i), \quad 0 \leq i < p \\ [\mu u'](N^*) = 0, \quad (\text{loi de Kirchhoff}) \\ u(M^*) = 1 \\ u(M_i) = r_i, \quad 0 \leq i < p \\ u'(M^*) = \lambda \\ u'(M_i) = \lambda r_i \alpha_i^{-1}, \quad 0 \leq i < p \\ (5.2.25) \text{ est satisfait, i.e. } \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i |r_i|^2 \alpha_i^{-1} < 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est triviale (il ne s’agit que d’une réécriture du problème (5.3.16) qui consiste à réintroduire $r_i = u(M_i)$ et $\lambda = u'(M^*)$ comme inconnues). \square

Remarque 5.3.15. En utilisant le lemme 5.3.12, nous savons que $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$ admet au moins une solution et au plus deux solutions. Il nous reste à déterminer à quelle(s) condition(s) ces deux solutions sont distinctes.

5.3.2.3 Résolution du problème en domaine borné et CNS explicite

Dans toute la suite, nous paramétrons le segment $(M^* N^*)$ par son abscisse curviligne $x^* \in (0, L^*)$, avec $x^* = 0$ au point M^* , et nous paramétrons chaque segment $(N^* M_i)$ par son abscisse curviligne $x_i \in (L^*, L^* + L_i)$, avec $x_i = L^*$ au point N^* . Alors, pour le problème $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$, l’écriture explicite de la solution u est :

- sur le segment $(M^* N^*)$, la double intégration de la première ligne de $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$ et l’utilisation de la ligne 3 donne, sur le segment $(M^* N^*)$:

$$\mu(x^*) u'(x^*) = \mu(M^*) u'(M^*) = \lambda$$

Nous intégrons alors cette relation et nous utilisons la ligne 5 de $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$ pour écrire u sur le segment (M^*N^*) sous la forme :

$$u(x^*) = 1 + \lambda \int_0^{x^*} \frac{dt}{\mu(t)} \quad (5.3.18)$$

- de même, sur chaque segment (N^*M_i) , la fonction u est donnée par :

$$u(x_i) = r_i \left(1 + \lambda \frac{\mu_i}{\alpha_i} \int_{L^*+L_i}^{x_i} \frac{dt}{\mu(t)} \right) \quad (5.3.19)$$

Nous pouvons voir que la fonction u introduite par (5.3.18) et (5.3.19) satisfait les lignes 1,3,4,5 et 6 de $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$. Introduisons maintenant les quantités suivantes :

$$L_\mu^* = \int_0^{L^*} \frac{dt}{\mu(t)} \quad \text{et} \quad L_{i,\mu} = \int_{L^*}^{L^*+L_i} \frac{dt}{\mu(t)}, \quad 0 \leq i < p \quad (5.3.20)$$

La fonction u que nous voulons construire doit être continue au point N^* et satisfaire les lignes 2 et 7 de $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$, ce qui se traduit par le système suivant :

$$r_i (1 - \lambda \alpha_i^{-1} L_{i,\mu}) = \lambda L_\mu^* + 1, \quad \forall 0 \leq i < p \quad (5.3.21-(i))$$

$$\lambda \left(1 - \sum_{i=0}^{p-1} r_i \mu_i \alpha_i^{-1} \right) = 0 \quad (5.3.21-(ii))$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i |r_i|^2 \alpha_i^{-1} < 1 \text{ ou } \lambda = 0 \quad (5.3.21-(iii))$$

Nous pouvons résumer cette construction par le lemme suivant

Lemme 5.3.16. *Soit $(u, r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda) \in \mathcal{H}_\mu^1(\widehat{\Sigma}) \times \mathbb{C}^{p+1}$ une solution de $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$. Alors $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda)$ est solution de (5.3.21).*

Inversement, soit $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda) \in \mathbb{C}^{p+1}$ une solution de (5.3.21), et soit $u \in \mathcal{H}_\mu^1(\widehat{\Sigma})$ la fonction définie par (5.3.18, 5.3.19). Alors $(u, r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda)$ est solution de $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$.

Démonstration. Le premier point de ce lemme est trivial par construction du problème (5.3.21). Inversement, soit $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda) \in \mathbb{C}^{p+1}$ une solution de (5.3.21), et soit $u \in \mathcal{H}_\mu^1(\widehat{\Sigma})$ la fonction définie par (5.3.18, 5.3.19). Il est alors facile de voir que u vérifie les lignes 1,3,4,5 et 6 de $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$ par construction. Les lignes 2 et 7 sont automatiquement vérifiées grâce au problème (5.3.21). \square

Nous allons énoncer un autre lemme technique qui nous donne des informations supplémentaires sur λ :

Lemme 5.3.17. *Soit $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda) \in \mathbb{C}^{p+1}$ une solution de (5.3.21), alors $\lambda \leq 0$.*

Inversement, soit $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda) \in \mathbb{C}^{p+1}$ une solution de (5.3.21-(i)) et (5.3.21-(ii)) avec $\lambda \leq 0$. Alors la relation (5.3.21-(iii)) est satisfaite.

Démonstration. Soit $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda) \in \mathbb{C}^{p+1}$ une solution de (5.3.21), et définissons la fonction u par (5.3.18) et (5.3.19). En utilisant le lemme 5.3.16, nous savons que u est solution du problème $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$. Nous multiplions alors la première ligne de $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$ par \bar{u} , et nous faisons une intégration par parties en utilisant la seconde ligne de $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\widehat{\Sigma}} (\mu u')'(\mathbf{x}) \bar{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\widehat{\Sigma}} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \sum_{i=0}^{p-1} \mu(M_i) u'(M_i) \bar{u}(M_i) - \mu(M^*) u'(M^*) \bar{u}(M^*) \end{aligned}$$

En utilisant les lignes 3 à 6 du problème $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$, la relation précédente s'écrit

$$\lambda \mu(M^*) \left(1 - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i |r_i|^2}{\alpha_i} \right) = - \int_{\widehat{\Sigma}} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (5.3.22)$$

Le membre de droite de (5.3.22) est négatif, donc le membre de gauche doit l'être aussi. Nous en déduisons alors que (5.3.21-(iii)) est satisfaite si et seulement si $\lambda \leq 0$. \square

Nous pouvons déjà voir que le $(p+1)$ -uplet $(1, 1, \dots, 1, 0)$ (correspondant à la solution $u = 1$ sur $\widehat{\Sigma}$) est solution du problème (5.3.21). La question que nous pouvons alors nous poser est : existe-t-il au moins un autre p -uplet solution de (5.3.21) ?

Pour répondre à cette question, l'idée est d'exprimer chaque r_i en fonction de λ , et de dire que λ est la racine d'une certaine fonction. En utilisant le lemme 5.3.17, nous pouvons sortir r_i de la relation (5.3.21-(i)), pour obtenir

$$r_i = \frac{\alpha_i (\lambda L_\mu^* + 1)}{\alpha_i - \lambda L_{i,\mu}} \quad (5.3.23)$$

Nous remplaçons r_i donné par (5.3.23) dans (5.3.21-(ii)), pour obtenir la relation fonctionnelle

$$\lambda \left(1 - \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \frac{\lambda L_\mu^* + 1}{\alpha_i - \lambda L_{i,\mu}} \right) = 0 \quad (5.3.24)$$

Le lemme 5.3.17 associé à la relation (5.3.24) nous permet d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 5.3.18. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et r_i défini par (5.3.23) pour i compris entre 0 et $p-1$. Alors le $(p+1)$ -uplet $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda)$ est solution de (5.3.21) si et seulement si $\lambda \leq 0$ et (5.3.24) est satisfaite.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme est triviale. \square

Jusqu'à présent, nous avons donné des problèmes équivalents au problème $(\mathcal{P}_{\widehat{\Sigma}})$, grâce aux lemmes 5.3.16 et 5.3.18. Maintenant, nous pouvons déterminer l'existence ou la non-existence de solutions non-triviales du problème (5.3.24) par le théorème suivant :

Théorème 5.3.19. *Il existe un unique $\lambda < 0$ tel que (5.3.24) soit satisfaite si et seulement si*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} > 1 \quad (5.3.25)$$

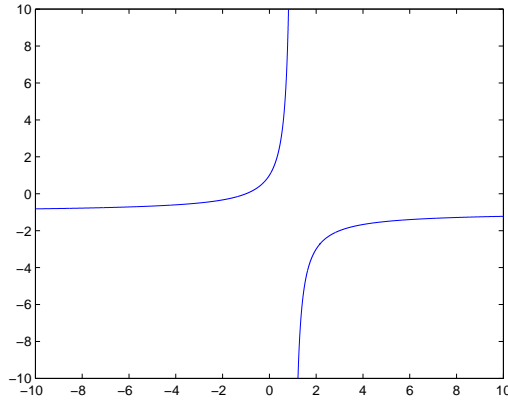
Démonstration. Nous étudions la fonction \mathbf{f} définie par

$$\mathbf{f}(\lambda) = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \frac{\lambda L_\mu^* + 1}{\alpha_i - \lambda L_{i,\mu}}$$

Nous pouvons voir que $\mathbf{f}(\lambda)$ est la somme de fonctions qui se comportent comme $\lambda \mapsto \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$, dont le graphique est donné par la figure 5.7.

Le théorème revient à démontrer sous quelle condition il existe un unique $\lambda < 0$ tel que $\mathbf{f}(\lambda) = 1$. Sur l'intervalle $] -\infty, 0[$, \mathbf{f} est une somme de fonctions continues et strictement croissantes (la dérivée $\mathbf{f}'(\lambda)$ est égale à $\sum (L_{i,\mu} + \alpha_i L_\mu^*) / (\alpha_i - \lambda L_{i,\mu})^2$ et est strictement positive), et la limite de \mathbf{f} quand $\lambda \rightarrow -\infty$ vaut

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathbf{f}(\lambda) = - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i L_\mu^*}{L_{i,\mu}} \leq 0$$

FIGURE 5.7 – Tracé de la fonction $\lambda \mapsto \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$

Donc, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\lambda < 0$ tel que $\mathbf{f}(\lambda) = 1$ si et seulement si $\mathbf{f}(0) > 1$. Or, nous avons

$$\mathbf{f}(0) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i}{\alpha_i}$$

d'où le résultat. \square

Finalement, nous savons que le problème de Laplace admet deux solutions auto-similaires différentes si et seulement si (5.3.25) est satisfait.

Théorème 5.3.20. *Nous avons l'équivalence suivante*

$$\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \iff \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} > 1 \quad (5.3.26)$$

Démonstration. Le théorème 5.3.1 nous dit que $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ si et seulement si $\mathbf{1} \notin \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. Les résultats de la section 5.3.2.2 couplés au lemme 5.3.17 nous dit que $\mathbf{1} \notin \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ si et seulement si le problème (5.3.21) a moins deux solutions, ce qui est équivalent à dire qu'il existe $\lambda < 0$ satisfaisant (5.3.24), en utilisant le lemme 5.3.18. Finalement, le théorème 5.3.19 nous donne la condition nécessaire et suffisante d'existence de $\lambda < 0$ satisfaisant (5.3.24). \square

5.4 Quelques résultats sur les opérateurs de trace

Nous savons maintenant donner une condition nécessaire et suffisante sur la géométrie du réseau \mathcal{T} pour avoir $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ dans le cas d'un poids auto-similaire. Comme l'espace $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ est un espace vectoriel fermé pour la norme définie sur $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$, il est assez naturel de considérer l'espace quotient

$$\mathbf{H}_\mu^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{T}) = \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) / \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \quad (5.4.1)$$

Nous cherchons à caractériser cet espace quotient au moyen d'opérateurs de traces que nous allons définir par la suite. Une remarque préliminaire que nous pouvons faire est que l'espace quotient $\mathbf{H}_\mu^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{T})$ est non trivial si les espaces $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ et $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ sont différents, autrement dit si les problèmes (\mathcal{P}_N) et (\mathcal{P}_D) sont différents.

5.4.1 Définition des opérateurs de trace

Dans cette section, nous allons introduire la notion d'opérateur de trace, et nous allons expliquer pourquoi cet opérateur n'a de sens que lorsque l'espace quotient $\mathbf{H}_\mu^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{T})$ n'est pas vide.

Définition 5.4.1 (p -partition de l'intervalle unité). Nous appellerons p -partition de l'intervalle unité tout p -uplet $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1})$ tel que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i = 1$$

Exemple 5.4.2. Un exemple de p -partition trivial est de prendre $\gamma_i = \frac{1}{p}$, *i.e.* on découpe le segment $(0, 1)$ en p morceaux de même longueur.

Définition 5.4.3 (Opérateur de trace sur une p -partition). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$, soit μ un poids auto-similaire de rapports de similarité $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1})$ sur \mathcal{T} et soit $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1})$ une p -partition de l'intervalle unité. Soit $u \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$. Nous pouvons alors définir, en notant $[M]_{p,j}^n = [s]_{p,j}^n(M^*)$:

- $T_\gamma^n(u) \in L^2(]0, 1[)$ la fonction constante par morceaux définie sur $(0, 1)$ par

$$T_\gamma^n(u)(x) = u([M]_{p,j}^n), \quad x \in][[\gamma]]_{p,j}^n, [[\gamma]]_{p,j+1}^n[$$

Nous notons, grâce à la proposition 5.1.10, que $[[\gamma]]_{p,p^n}^n = 1$ quel que soit γ et quel que soit n .

- T_γ^∞ la limite dans $L^2(]0, 1[)$ (sous réserve d'existence) de T_γ^n lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous appellerons alors trace de u sur la p -partition γ la quantité T_γ^∞

Remarque 5.4.4. Quel que soit la p -partition γ que l'on considère, nous avons $T_\gamma^\infty(\mathbb{1}) = 1$

Exemple 5.4.5. Nous partons du motif $\widehat{\Sigma}$ donné par la réunion de 2 segments M^*M_0 et M^*M_1 . Construisons sur ce motif un réseau 2-adique dont les similitudes ont pour rapport $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$. Prenons alors $\mu_0 = \mu_1 = \frac{1}{2}$, (il s'agit d'un cas pour lequel $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$). Soit u la fonction affine par morceaux sur chaque segment de l'arbre \mathcal{T} telle que $u([M]_{p,j}^n) = 2^{-1-n} + 2^{-n}j$.

Prenons maintenant $\gamma_0 = \gamma_1 = \frac{1}{2}$. Par définition des $[[\gamma]]_{p,j}^n$, nous avons

$$[[\gamma]]_{p,j}^n = 2^{-n}j$$

Nous avons, pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $0 \leq j < 2^n$,

$$T_\gamma^n(u)(x) = 2^{-1-n} + 2^{-n}j, \quad x \in]2^{-n}j, 2^{-n}(j+1)[$$

Nous pouvons voir que $T_\gamma^n(u)$ tend vers la fonction $x \mapsto x$ lorsque n tend vers l'infini (c.f. figure 5.8).

Proposition 5.4.6. *En reprenant les notations de la définition 5.4.3, si $\mathbb{1} \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, alors il n'existe aucune p -partition γ telle que l'opérateur T_γ^∞ soit continu de $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L^2(]0, 1[)$.*

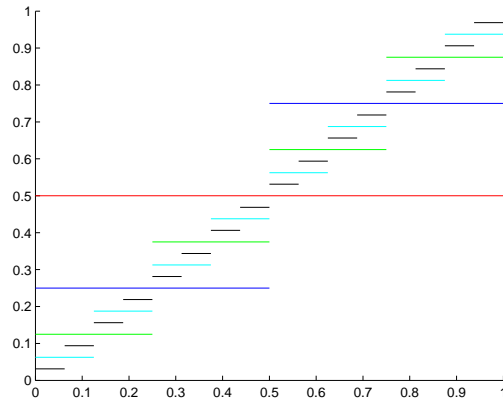
Démonstration. Supposons que $\mathbb{1} \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, et soit γ une p -partition de l'intervalle unité. En reprenant la remarque 5.4.4, nous avons $T_\gamma^\infty(\mathbb{1}) = 1$. Or, $\mathbb{1} \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, donc il existe une suite de fonctions $(\mathbb{1}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ telle que

$$\|\mathbb{1}_n - \mathbb{1}\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Or, pour n fixé, $\mathbb{1}_n \in \mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ donc nous avons $T_\gamma^\infty(\mathbb{1}_n) = 0$. Nous obtenons par suite

$$\|T_\gamma^\infty(\mathbb{1}_n - \mathbb{1})\|_{L^2(]0, 1[)} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui achève la démonstration. □

FIGURE 5.8 – Tracé de la fonction $T_\gamma^n(u)$

De la proposition 5.4.6, nous en déduisons que si il existe une p -partition γ telle que $T_\gamma^\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), L^2([0,1[)))$, alors $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. Nous allons démontrer dans la section suivante que l'implication réciproque est également vraie.

5.4.2 Théorèmes de trace

Théorème 5.4.7 (Théorème de trace). *Reprenons les notations de la définition 5.4.3, et considérons le réseau donné par l'exemple 5.2.5. Supposons que $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, alors il existe une p -partition γ telle que $\gamma_i \alpha_i < \mu_i$ pour tout $0 \leq i < p$, et telle que $T_\gamma^\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), L^2([0,1[)))$.*

Remarque 5.4.8. Nous considérons le réseau donné par l'exemple 5.2.5 pour la clarté de la démonstration qui va suivre. Il est cependant facile de généraliser cette démonstration pour un choix quelconque de $\hat{\Sigma}$.

Démonstration du théorème 5.4.7. Nous allons d'abord démontrer l'existence d'une telle p -partition γ satisfaisant $\gamma_i \alpha_i < \mu_i$. Soit γ la p -partition définie par

$$\gamma_i = \frac{\mu_i \alpha_i^{-1}}{p-1 \sum_{k=0} \mu_k \alpha_k^{-1}}$$

Nous pouvons constater que, pour tout $0 \leq i < p$, $\gamma_i \alpha_i = \mu_i / (\sum \mu_k \alpha_k^{-1})$. Or, le théorème 5.3.20 nous donne justement que $\sum \mu_k \alpha_k^{-1} > 1$, donc la propriété voulue sur γ est satisfaite.

Maintenant, nous départicularisons le choix de γ et nous supposons simplement que $\gamma_i \alpha_i \leq \mu_i$ pour tout $0 \leq i < p$, et soit $u \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$. Nous allons démontrer que la suite $(T_\gamma^n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2([0,1[))$, avec un contrôle si possible uniforme de la forme par la norme $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$ de u . Nous allons démontrer ce résultat en deux étapes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)\|_{L^2([0,1])}^2 &= \int_0^1 (T_\gamma^{n+1}(u)(x) - T_\gamma^n(u)(x))^2 dx \\
 &= \sum_{j=0}^{p^n-1} \sum_{k=0}^{p-1} [\gamma]_{p,pj+k}^{n+1} \left| u\left([M]_{p,pj+k}^{n+1}\right) - u\left([M]_{p,j}^n\right) \right|^2 \\
 &= \sum_{j=0}^{p^n-1} [\gamma]_{p,j}^n \sum_{k=0}^{p-1} \gamma_k \left| u\left([M]_{p,pj+k}^{n+1}\right) - u\left([M]_{p,j}^n\right) \right|^2
 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

(On utilise le lemme 5.1.4)

Or, pour tout $0 \leq j \leq p^n - 1$ et pour tout $0 \leq k \leq p - 1$, nous avons

$$u\left([M]_{p,pj+k}^{n+1}\right) - u\left([M]_{p,j}^n\right) = \int_{[M]_{p,pj+k}^{n+1}}^{[M]_{p,j}^n} u'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{5.4.3}$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur (5.4.3) afin d'obtenir

$$\left| u\left([M]_{p,pj+k}^{n+1}\right) - u\left([M]_{p,j}^n\right) \right|^2 \leq \left(\int_{[M]_{p,pj+k}^{n+1}}^{[M]_{p,j}^n} |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \overline{[M]_{p,j}^n [M]_{p,pj+k}^{n+1}} \tag{5.4.4}$$

De plus, nous avons la majoration

$$\int_{[M]_{p,pj+k}^{n+1}}^{[M]_{p,j}^n} |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \max_{\Sigma_{p,j}^n} (\mu^{-1}) \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

et, toujours en utilisant des arguments d'auto-similarité, nous avons

$$\int_{[M]_{p,pj+k}^{n+1}}^{[M]_{p,j}^n} |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \max_{\Sigma} (\mu^{-1}) [\mu^{-1}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \tag{5.4.5}$$

En utilisant des arguments d'auto-similarité, la longueur $\overline{[M]_{p,j}^n [M]_{p,pj+k}^{n+1}}$ intervenant dans (5.4.4) est égale à $[\alpha]_{p,j}^n (L^* + L_k)$. Par conséquent, en combinant les relations (5.4.4) et (5.4.5), nous obtenons

$$\left| u\left([M]_{p,pj+k}^{n+1}\right) - u\left([M]_{p,j}^n\right) \right|^2 \leq C [\alpha \mu^{-1}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \tag{5.4.6}$$

avec $C = \max_k (L^* + L_k) \max_{\Sigma} (\mu^{-1})$ ne dépendant ni de j , ni de k , ni de n . Nous sommes alors γ_k (5.4.6) pour $0 \leq k \leq p - 1$, en constatant que le membre de droite de (5.4.6) ne dépend pas de k , nous utilisons le fait que γ est une p -partition, donc $\sum \gamma_k = 1$, nous sommes ensuite sur j afin de faire apparaître le membre de droite de (5.4.2). Finalement, nous obtenons l'estimation

$$\|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)\|_{L^2([0,1])}^2 \leq C \sum_{j=0}^{p^n-1} [\gamma \alpha \mu^{-1}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \tag{5.4.7}$$

En notant $\beta = \max_i (\gamma_i \alpha_i \mu_i^{-1})$, et par définition de $[\gamma \alpha \mu^{-1}]_{p,j}^n$, nous obtenons

$$[\gamma \alpha \mu^{-1}]_{p,j}^n \leq \beta^n, \quad \forall 0 \leq j \leq p^n - 1$$

et en utilisant que

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} [\gamma\alpha\mu^{-1}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x})|u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{G}^n} \mu(\mathbf{x})|u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

nous obtenons l'estimation

$$\|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)\|_{L^2(]0,1])}^2 \leq C\beta^n \int_{\mathcal{G}^n} \mu(\mathbf{x})|u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (5.4.8)$$

Nous majorons l'intégrale sur \mathcal{G}^n par l'intégrale sur \mathcal{T} , et nous obtenons, en prenant la racine carré de la relation (5.4.8) :

$$\|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)\|_{L^2(]0,1])} \leq \sqrt{C}\sqrt{\beta}^n |u|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} \quad (5.4.9)$$

- Soient maintenant $(q, r) \in \mathbb{N}^2$, avec $q < r$. En utilisant une inégalité triangulaire, nous avons

$$\begin{aligned} \|T_\gamma^r(u) - T_\gamma^q(u)\|_{L^2(]0,1])} &\leq \sum_{n=q}^{r-1} \|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)\|_{L^2(]0,1])} \\ &\leq \sum_{n=q}^{r-1} \sqrt{C}\sqrt{\beta}^n |u|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} \quad (\text{relation (5.4.9)}) \\ &\leq \sqrt{C}|u|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} \sum_{n=q}^{r-1} \sqrt{\beta}^n \\ &\leq \sqrt{C}|u|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} \frac{(\sqrt{\beta})^q - (\sqrt{\beta})^r}{1 - \sqrt{\beta}} \\ &\quad (\text{somme des termes d'une suite géométrique de raison } \sqrt{\beta}) \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Puisque $\gamma_i\alpha_i\mu_i^{-1} < 1$ pour tout i , nous obtenons $\beta < 1$, et il est alors facile de démontrer que :

$$\lim_{q,r \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{\beta})^q - (\sqrt{\beta})^r}{1 - \sqrt{\beta}} = 0$$

La suite $T_\gamma^n(u)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(]0,1])$ qui est un espace complet. Cette suite converge donc dans $L^2(]0,1])$ vers un élément que nous appelons $T_\gamma^\infty(u)$. Par passage à la limite dans (5.4.10) en prenant $q = 0$, nous obtenons

$$\|T_\gamma^\infty(u) - T_\gamma^0(u)\|_{L^2(]0,1])} \leq \frac{\sqrt{C}}{1 - \sqrt{\beta}} |u|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} \quad (5.4.11)$$

En utilisant de nouveau une inégalité triangulaire sur (5.4.11), et en utilisant le fait que $T_\gamma^0(u) = u(M^*)$, nous avons

$$\|T_\gamma^\infty(u)\|_{L^2(]0,1])} \leq \max\left(1, \frac{\sqrt{C}}{1 - \sqrt{\beta}}\right) \|u\|_{\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})} \quad (5.4.12)$$

ce qui prouve le fait que $T_\gamma^\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), L^2(]0,1]))$. \square

Corollaire 5.4.9. *Sous les hypothèses du théorème 5.4.7, pour toute p -partition γ telle que $T_\gamma^\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), L^2(]0,1]))$, pour toute fonction $u \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, $T_\gamma^\infty(u) = 0$. Autrement dit,*

$$\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \subset \{u \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \text{ tel que } T_\gamma^\infty(u) = 0\}$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. Il existe alors une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{T})$ telle que $\|u - u_n\|_{\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Nous utilisons alors le fait que l'opérateur \mathcal{T} est linéaire continu, et que $T_{\gamma}^{\infty}(u_n) = 0$ puisque u_n est à support compact. \square

Conjecture 5.4.10. Nous conjecturons que la relation l'inclusions donnée dans le corollaire 5.4.9 est en fait une égalité, *i.e.*

$$\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) = \{u \in \mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T}) \text{ tel que } T_{\gamma}^{\infty}(u) = 0\}$$

Remarque 5.4.11. Dans la démonstration du théorème 5.4.7, nous avons vu que la condition $\gamma_i \alpha_i < \mu_i$ était une condition suffisante pour assurer la continuité de l'opérateur de trace de $\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ dans $L^2(]0, 1[)$. Nous pouvons également presque démontrer que c'est une condition nécessaire (le cas $\gamma_i \alpha_i = \mu_i$ est un cas très particulier dont l'écriture ne ferait que compliquer cette section).

Soit γ une p -partition de l'intervalle unité telle qu'il existe i avec $\gamma_i \alpha_i > \mu_i$. Soit $\hat{u} \in \mathcal{H}_{\mu}^1(\hat{\Sigma})$ tel que

- $u(M_i) = 1$,
- $u(M_k) = 0$, pour $k \neq i$,
- $u(M^*) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $j_n = \sum_{n'=0}^n p^{n'} i$ (autrement dit, l'écriture de j en base p avec n chiffres est $iii \dots i$). Ainsi, pour tout a p -uplet de (\mathbb{K}, \star) , on a $[a]_{p,j_n}^n = a_i^n$. Soit maintenant $u_n \in \mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ défini par

- $u_n = \left(\sqrt{\alpha_i \mu_i^{-1}} \right)^n u([s]_{p,j_n}^{-n}(\mathbf{x}))$ sur Σ_{p,j_n}^n ,
- $u_n = \left(\sqrt{\alpha_i \mu_i^{-1}} \right)^n$ sur $[s]_{p,j_{n+1}}^{n+1}(\mathcal{T})$,
- $u_n = 0$ sur le reste du réseau \mathcal{T}

de sorte que $\|u_n\|_{\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})}$ ne dépende pas de n (nous utilisons le lemme 5.2.26 avec $m = 1$). De plus, comme u_n ne varie plus à partir de la génération $n + 1$, nous pouvons voir que pour $q \geq n + 1$, $T_{\gamma}^q(u_n) = T_{\gamma}^{n+1}(u_n)$. Or, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \|T_{\gamma}^{n+1}(u_n)\|_{L^2(]0,1[)}^2 &= [\gamma]_{p,j_{n+1}}^{n+1} (\alpha_i \mu_i^{-1})^n \\ &= \gamma_i (\gamma_i \alpha_i \mu_i^{-1})^n \end{aligned}$$

Puisque $\gamma_i \alpha_i > \mu_i$, cette norme explose quand $n \rightarrow \infty$. Il ne peut donc exister de constante C telle que pour tout $u \in \mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$, on ait $\|T_{\gamma}^{\infty}(u)\|_{L^2(]0,1[)} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})}$.

Le théorème 5.4.7 nous dit que la trace d'une fonction de $\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ est dans l'espace $L^2(]0, 1[)$. Nous pouvons toutefois raisonnablement supposer que la trace est dans un meilleur espace que $L^2(]0, 1[)$, typiquement un $H^r(]0, 1[)$. La proposition suivante nous dit que nous ne pouvons pas espérer avoir $r \geq \frac{1}{2}$.

Proposition 5.4.12. *Sous les hypothèses du théorème 5.4.7, il n'existe aucune p -partition γ de $]0, 1[$ telle que l'image de $\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ par l'opérateur T_{γ}^{∞} soit dans $H^{\frac{1}{2}}(]0, 1[)$.*

Démonstration. Soit $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1})$ une p -partition de l'intervalle unité. Nous savons que la fonction Φ de $L^2(]0, 1[)$ qui vaut 1 sur $]0, \gamma_0[$ et 0 sinon n'est pas une fonction de $H^{\frac{1}{2}}(]0, 1[)$. Or, en prenant u une fonction de $\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ qui vaut 1 sur $s_0(\mathcal{T})$ et 0 sur $s_i(\mathcal{T})$, pour $1 \leq i \leq p - 1$, il est facile de voir que pour $n \geq 1$, $T_{\gamma}^n(u) = \Phi$, et par convergence L^2 , $T_{\gamma}^{\infty}(u) = \Phi$. Nous avons donc exhibé une fonction de $\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ dont sa trace n'est pas dans $H^{\frac{1}{2}}(]0, 1[)$. \square

Nous pouvons donc nous poser la question suivante : a-t-on, pour tout $r < \frac{1}{2}$, $T_\gamma^\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), \mathbb{H}^r(]0,1[))$?

Théorème 5.4.13. *Sous les hypothèses du théorème 5.4.7, pour tout r tel que*

$$0 \leq r < \min \left(\frac{1}{2}, \min_{0 \leq i < p} \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln(\mu_i \alpha_i^{-1})}{2 \ln(\gamma_i)} \right) \right)$$

alors

$$T_\gamma^\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), \mathbb{H}^r(]0,1[))$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème est similaire à la démonstration du théorème 5.4.7. La différence, que nous allons détailler ici, réside dans le fait que nous devons estimer $\|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)\|_{\mathbb{H}^r(]0,1[)}$ au lieu de $\|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)\|_{L^2(]0,1[)}$.

Nous rappelons (nous pouvons trouver une définition plus générale dans [MC97]) qu'une fonction $v \in L^2(]0,1[)$ est dans l'espace $\mathbb{H}^r(]0,1[)$ si et seulement si

$$|v|_r^2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{1+2r}} dy dx < \infty \quad (5.4.13)$$

Pour une fonction v constante par morceaux sur chaque intervalle $[[\gamma]]_{p,j}^n, [[\gamma]]_{p,j+1}^n$, nous avons, en notant v_j la valeur de v sur cet intervalle

$$|v|_r^2 = \sum_{j=0}^{p^n-1} \sum_{l=0}^{p^n-1} |v_j - v_l|^2 A_{j,l}^{\gamma,n}(r)$$

avec

$$A_{j,l}^{\gamma,n}(r) = \int_{[[\gamma]]_{p,j}^n}^{[[\gamma]]_{p,j+1}^n} \int_{[[\gamma]]_{p,l}^n}^{[[\gamma]]_{p,l+1}^n} \frac{dy dx}{|x - y|^{1+2r}} \quad \text{pour } j \neq l, \quad A_{j,j}^{\gamma,n}(r) = 0 \quad (5.4.14)$$

Nous appliquons le calcul de cette norme avec la fonction $v = T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)$. En réutilisant la majoration (5.4.6), nous savons

$$|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)|_r^2 \leq 4C \sum_{j=0}^{p^n-1} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{p^n-1} \sum_{m=0}^{p-1} \left([\alpha \mu^{-1}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) A_{pj+k,pl+m}^{\gamma,n+1}(r)$$

soit, en notant $\ell = pl + m$ et en sortant les termes dépendant uniquement de j des sommes sur k et ℓ

$$|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)|_r^2 \leq 4C \sum_{j=0}^{p^n-1} [\alpha \mu^{-1}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{\ell=0}^{p^{n+1}-1} A_{pj+k,\ell}^{\gamma,n+1}(r) \right) \quad (5.4.15)$$

Dans la majoration (5.4.15), nous pouvons voir que nous devons calculer une somme sur ℓ des quantités $A_{pj+k,\ell}^{\gamma,n+1}(r)$. Si nous revenons à la définition donnée par (5.4.14), et si nous utilisons le fait que les intervalles $[[\gamma]]_{p,\ell}^{n+1}, [[\gamma]]_{p,\ell+1}^{n+1}$ sont disjoints deux à deux, alors

$$\sum_{\ell=0}^{p^{n+1}-1} A_{pj+k,\ell}^{\gamma,n+1}(r) = \int_{[[\gamma]]_{p,pj+k}^{n+1}}^{[[\gamma]]_{p,pj+k+1}^{n+1}} \int_0^1 \frac{dy dx}{|x - y|^{1+2r}} + \int_{[[\gamma]]_{p,pj+k+1}^{n+1}}^{[[\gamma]]_{p,pj+k+1}^{n+1}} \int_{[[\gamma]]_{p,pj+k}^{n+1}}^{[[\gamma]]_{p,pj+k+1}^{n+1}} \frac{dy dx}{|x - y|^{1+2r}}$$

Nous majorons brutalement les intégrales du membre de droite, en utilisant le fait que $r < \frac{1}{2}$, par

$$\int_{[[\gamma]]_{p,pj+k}^{n+1}} \int_{-\infty}^{[[\gamma]]_{p,pj+k}^{n+1}} \frac{dydx}{|x-y|^{1+2r}} + \int_{[[\gamma]]_{p,pj+k}^{n+1}} \int_{[[\gamma]]_{p,pj+k+1}^{n+1}}^{+\infty} \frac{dydx}{|x-y|^{1+2r}} = \frac{[\gamma^{1-2r}]_{p,pj+k}^{n+1}}{r(1-2r)}$$

La relation (5.4.15) devient alors

$$|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)|_r^2 \leq \frac{4C}{r(1-2r)} \sum_{j=0}^{p^n-1} [\alpha\mu^{-1}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \left(\sum_{k=0}^{p-1} [\gamma^{1-2r}]_{p,pj+k}^{n+1} \right)$$

Nous pouvons finalement écrire que $[\gamma^{1-2r}]_{p,pj+k}^{n+1} = \gamma_k^{1-2r} [\gamma]_{p,j}^n \leq [\gamma]_{p,j}^n$, puisque $\gamma_k \leq 1$ et que $1-2r > 0$. Finalement, nous obtenons la majoration

$$|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)|_r^2 \leq \frac{4Cp}{r(1-2r)} \sum_{j=0}^{p^n-1} [\gamma^{1-2r} \alpha\mu^{-1}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (5.4.16)$$

Si il existe un $\beta < 1$ tel que $\gamma_i^{1-2r} \alpha_i \mu_i^{-1} \leq \beta$ pour tout $0 \leq i < p$, alors nous pouvons majorer le membre de droite de (5.4.16) pour obtenir

$$|T_\gamma^{n+1}(u) - T_\gamma^n(u)|_r^2 \leq \frac{4Cp}{r(1-2r)} \beta^n \int_{\mathcal{G}^n} \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

qui est l'équivalent de la relation (5.4.8). Nous avons alors

$$\begin{aligned} \gamma_i^{1-2r} \alpha_i \mu_i^{-1} \leq \beta &\iff (1-2r) \ln \gamma_i - \ln(\mu_i \alpha_i^{-1}) \leq \ln(\beta) \\ &\iff (1-2r) \geq \frac{\ln(\mu_i \alpha_i^{-1}) + \ln(\beta)}{\ln \gamma_i} \quad (\gamma_i < 1, \text{ donc } \ln \gamma_i < 0) \\ &\iff r \leq \frac{1}{2} - \frac{\ln(\mu_i \alpha_i^{-1}) + \ln(\beta)}{\ln \gamma_i} \end{aligned}$$

Cette dernière relation implique que

$$r < \frac{1}{2} - \frac{\ln(\mu_i \alpha_i^{-1})}{\ln \gamma_i}, \quad \forall 0 \leq i < p$$

Inversement, si cette relation est vérifiée, il suffit de prendre β tel que

$$0 \geq \ln \beta \geq \ln(\gamma_i) \left(\frac{1}{2} - \ln(\mu_i \alpha_i^{-1}) - r \right), \quad \forall 0 \leq i < p$$

D'où le résultat. □

Remarque 5.4.14. Nous pouvons nous poser la question de la plus grande valeur de r que nous pouvons prendre, étant donné les rapports (α_i) des similitudes et les rapports (μ_i) du poids. Nous avons deux possibilités.

- Il existe i tel que $\mu_i \alpha_i^{-1} \geq 1$. Dans ce cas-là, quelle que soit la valeur de γ_i , nous avons

$$\frac{1}{2} - \frac{\ln(\mu_i \alpha_i^{-1})}{\ln \gamma_i} \geq \frac{1}{2}$$

Alors pour tout $r' < \frac{1}{2}$, pour tout j tel que $\mu_j \alpha_j^{-1} < 1$, nous posons $\gamma_i = \min(p^{-1}, (\mu_j \alpha_j^{-1})^{1/(1-3r)})$ de manière à avoir l'hypothèse du théorème 5.4.13 satisfaite, et nous choisissons les autres γ_i de manière à avoir $\sum \gamma_i = 1$.

- Pour tout i , nous avons $\mu_i \alpha_i^{-1} < 1$. Nous recherchons alors sur l'ensemble

$$\left\{ (\gamma_i)_{0 \leq i < p} \in \mathbb{R}_+^* / \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i = 1 \right\}$$

le maximum de la fonctionnelle

$$\inf_i \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln(\mu_i \alpha_i^{-1})}{\ln \gamma_i} \right)$$

Nous pouvons voir que le maximum est atteint lorsque la quantité $\frac{1}{2} - \frac{\ln(\mu_i \alpha_i^{-1})}{\ln \gamma_i}$ ne dépend pas de i . Cela revient à dire que $\mu_i \alpha_i^{-1}$ est une puissance de γ_i indépendante de i , que l'on notera s .

La condition $\sum_{i=0}^{p-1} = 1$ devient alors

$$\sum_{i=0}^{p-1} (\mu_i \alpha_i^{-1})^s = 1$$

Puisque chaque $\mu_i \alpha_i^{-1} < 1$, il existe un unique s satisfaisant cette relation (le calcul de s revient au calcul d'une dimension de Hausdorff). Dans ce cas-là, nous devons avoir

$$r < \frac{1}{2} - \frac{1}{2s}$$

Nous pouvons particulariser ces résultats dans le cas de l'arbre d -géométrique (pour lequel nous avons $\mu_i = \alpha_i^{d-1}$).

- Pour $d = 2$, nous avons $\mu_i = \alpha_i$, et dans ce cas-là quel que soit la p -partition unitaire γ que l'on considère, quel que soit $r < \frac{1}{2}$, $T_\gamma^\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), \mathbb{H}^r([0,1]))$.
- Pour $d = 3$, nous avons $\mu_i = \alpha_i^2$. Dans ce cas, nous avons que nous pouvons trouver une p -partition unitaire γ telle $T_\gamma^\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}), \mathbb{H}^r([0,1]))$ si et seulement si $r < \frac{1}{2} - \frac{1}{2s}$, où s est la dimension de Hausdorff de l'arbre 3-géométrique.

Résolution du problème de Helmholtz dans un réseau fractal

Résumé

Dans ce chapitre, nous gardons les notations du chapitre 5. À partir des problèmes (\mathcal{P}_N) et (\mathcal{P}_D) , nous définissons les problèmes de Helmholtz associés aux problèmes de Laplace, et nous allons donner quelques propriétés sur ces problèmes de Helmholtz.

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans la section 6.1, nous introduisons les problèmes de Helmholtz et les espaces fonctionnels associés à ces problèmes de Helmholtz, et nous donnons quelques résultats généraux sur l'existence et l'unicité des solutions de ces problèmes. Dans la section 6.2, nous donnons des résultats sur le comportement de la solution dans le cas de réseaux auto-similaires. Enfin, nous présentons dans la section 6.3 des résultats numériques obtenus sur la résolution de ce type de problèmes.

Sommaire

6.1	Introduction du problème de Helmholtz et résultats généraux	153
6.1.1	Compléments sur les espaces de Sobolev et problème de Helmholtz	153
6.1.2	Quelques résultats de compacité	155
6.2	Résolution du problème auto-similaire et construction d'opérateurs DtN	162
6.2.1	Définitions et propriétés générales	162
6.2.2	Restriction du problème pour certains cas particuliers	164
6.3	Calculs numériques de l'opérateur DtN λ	167
6.3.1	Résultats qualitatifs pour la fonction λ_d	168
6.3.2	Étude de la singularité de λ_n due à la géométrie	168

6.1 Introduction du problème de Helmholtz et résultats généraux

6.1.1 Compléments sur les espaces de Sobolev et problème de Helmholtz

Définition 6.1.1 (Espace H^1 à poids). Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire et soit μ un poids défini sur \mathcal{T} . Nous définissons les espaces $H_\mu^1(\mathcal{T})$ et $H_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ de la manière suivante

$$H_\mu^1(\mathcal{T}) = L_\mu^2(\mathcal{T}) \cap \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \quad (6.1.1)$$

$$H_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) = L_\mu^2(\mathcal{T}) \cap \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \quad (6.1.2)$$

Nous munissons ces deux espaces de la norme

$$\|u\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})}^2 = \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 + \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 \quad (6.1.3)$$

Nous pourrions voir par la suite que cet espace est adapté aux problèmes suivants (*i.e.* problèmes de Helmholtz).

Nous considérons les deux problèmes suivants, pour une fréquence donnée.

$$(\mathcal{P}_{N,\omega}) \quad \text{Trouver } u \in H_\mu^1(\mathcal{T}) \text{ telle que } u(M^*) = 1 \text{ et} \\ \int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) \left(u'(\mathbf{x}) \overline{v'(\mathbf{x})} - \omega^2 u(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in H_\mu^1(\mathcal{T}), v(M^*) = 0$$

$$(\mathcal{P}_{D,\omega}) \quad \text{Trouver } u \in H_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \text{ telle que } u(M^*) = 1 \text{ et} \\ \int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) \left(u'(\mathbf{x}) \overline{v'(\mathbf{x})} - \omega^2 u(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in H_{\mu,0}^1(\mathcal{T}), v(M^*) = 0$$

où le poids μ que l'on considère est continu sauf aux points $[N]_{p,j}^n$, de la même manière que nous considérons les problèmes de Laplace définis dans la section 5.3.2, pour ne pas avoir de discontinuités de u' ailleurs qu'en $[N]_{p,j}^n$. Nous pouvons déjà donner un premier résultat d'existence et d'unicité pour les problèmes $(\mathcal{P}_{N,\omega})$ et $(\mathcal{P}_{D,\omega})$:

Proposition 6.1.2. *Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\omega) \neq 0$, les problèmes $(\mathcal{P}_{N,\omega})$ et $(\mathcal{P}_{D,\omega})$ sont bien posés et admettent une unique solution.*

Démonstration. Il s'agit encore de l'application du théorème de Lax-Milgram, une fois que nous avons fait le même relèvement que le relèvement utilisé dans la preuve de la proposition 5.3.6. Appelons $a_\omega(u, v)$ la forme bilinéaire associée à notre problème de Helmholtz. Pour la continuité de cette forme bilinéaire, nous obtenons après une majoration brutale

$$|a_\omega(u, v)| \leq (1 + |\omega|^2) \|u\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})} \|v\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})}$$

La coercivité est un point un peu plus délicat à démontrer, et la démonstration de ce point repose sur l'hypothèse que ω a une partie imaginaire non-nulle. Nous partons de

$$a_\omega(u, u) = \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 - \omega^2 \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2$$

Nous obtenons, en prenant le carré de la norme dans chacun des deux membres de l'égalité précédente, l'expression suivante :

$$|a_\omega(u, u)|^2 = (A + B)^2 + C^2$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 \\ B &= (\Im(\omega)^2 - \Re(\omega)^2) \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 \\ C &= 2\Re(\omega)\Im(\omega) \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 \end{aligned}$$

En utilisant une inégalité de Young, nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|a_\omega(u, u)|^2 \geq (1 - t) A^2 + \left(1 - \frac{1}{t}\right) B^2 + C^2$$

soit

$$|a_\omega(u, u)|^2 \geq (1 - t) \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^4 + \left(\left(1 - \frac{1}{t}\right) (\Im(\omega)^2 - \Re(\omega)^2)^2 + 4\Re(\omega)^2\Im(\omega)^2 \right) \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^4$$

Prenons $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que les deux termes multipliant $\|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^4$ et $\|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^4$ soient positifs. Pour cela, il faut et il suffit de choisir t tel que

$$\left(\frac{\Re(\omega)^2 - \Im(\omega)^2}{\Re(\omega)^2 + \Im(\omega)^2} \right)^2 < t < 1$$

ce qui est possible si et seulement si $\Im(\omega) \neq 0$. Prenons un tel t satisfaisant cette double inégalité, il existe alors une constante $C_t > 0$ telle que

$$|a_\omega(u, u)|^2 \geq C_t \left(\|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^4 + \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^4 \right)$$

soit

$$|a_\omega(u, u)| \geq \sqrt{\frac{C_t}{2}} \|u\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})}^2$$

D'où le résultat. \square

A priori, les problèmes $(\mathcal{P}_{N,\omega})$ et $(\mathcal{P}_{N,\omega})$ peuvent être mal posés dès que la fréquence ω est réelle, ce qui correspond au niveau temporel à un problème de propagation d'ondes sans absorption. Si nous nous intéressons au cas "bateau" $p = \mu = 1$, nous savons par exemple que le problème de Neumann est bien posé quand $\alpha < 1$ sauf pour un nombre dénombrable de valeurs de ω qui forment un ensemble discret dans \mathbb{R} , et ce même problème est toujours mal posé dans le cas contraire. Ce résultat s'appuie fondamentalement sur la compacité de $H^1(0, L)$ dans $L^2(0, L)$. Pour établir un résultat similaire pour les réseaux, nous allons démontrer un résultat de compacité analogue, en utilisant une approche similaire à ce qui a été fait dans les travaux de Y. Achdou et N. Tchou [AT07] :

6.1.2 Quelques résultats de compacité

Lemme 6.1.3. *Supposons qu'il existe $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\gamma_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ avec*

$$\forall v \in H_\mu^1(\mathcal{T}), \quad \|v\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n)} \leq \gamma_n \|v\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})} \quad (6.1.4)$$

Alors l'injection de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$ est compacte.

Inversement, si l'injection de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$ est compacte, alors il existe $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\gamma_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ à une sous-suite près, avec

$$\forall v \in H_\mu^1(\mathcal{T}), \quad \|v\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n)} \leq \gamma_n \|v\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})}$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que γ_n tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini et telle que (6.1.4) soit satisfaite, et montrons que l'injection de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$ est une injection compacte. Soit (u_n) une suite bornée dans $H_\mu^1(\mathcal{T})$. Quitte à en extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que u_n converge faiblement dans $H_\mu^1(\mathcal{T})$ vers une fonction u .

Par hypothèse sur u_n , la restriction de u_n à l'arbre \mathcal{T}^1 est bornée dans $H_\mu^1(\mathcal{T}^1)$. Par compacité de $H_\mu^1(\mathcal{T}^1)$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T}^1)$, nous pouvons extraire une suite $u_n^{(1)}$ de u_n telle que

$$u_n^{(1)} \longrightarrow u^{(1)} \equiv u|_{\mathcal{T}^1} \quad \text{dans } L_\mu^2(\mathcal{T}^1)$$

De proche en proche, nous pouvons construire une suite de suites $(u_n^{(k)})_{k,n \in \mathbb{N}}$ ayant les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n^{(k+1)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite extraite de } (u_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \\ u_n^{(k)} \longrightarrow u^{(k)} \equiv u|_{\mathcal{T}^k} \quad \text{dans } L_\mu^2(\mathcal{T}^k) \end{array} \right. \quad (6.1.5)$$

On construit alors la suite diagonale

$$\tilde{u}_n = u_n^{(n)}$$

qui vérifie :

$$\forall k \geq 1, \quad \tilde{u}_n \rightarrow u \text{ dans } L_\mu^2(\mathcal{T}^k) \quad (6.1.6)$$

En effet, pour $n > k$, $(u_q^{(n)})_{q \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite extraire de la suite $(u_q^{(k)})_{q \in \mathbb{N}}$ - il s'agit de la relation (6.1.5). Toujours en utilisant la relation (6.1.5), nous savons que $u_q^{(k)}$ tend vers u en norme $L_\mu^2(\mathcal{T}^k)$ quand $q \rightarrow \infty$.

Nous utilisons enfin l'identité

$$\|\tilde{u}_n - u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 = \|\tilde{u}_n - u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T}^k)}^2 + \|\tilde{u}_n - u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^k)}^2$$

Nous utilisons alors l'hypothèse. (6.1.4 et l'identité précédente pour écrire

$$\|\tilde{u}_n - u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 < \|\tilde{u}_n - u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T}^k)}^2 + \gamma_k \|\tilde{u}_n - u\|_{H_\mu^1(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^k)}^2$$

Comme la suite \tilde{u}_n est une suite bornée dans $H_\mu^1(\mathcal{T})$, nous avons donc

$$\|\tilde{u}_n - u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 \leq \|\tilde{u}_n - u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T}^k)}^2 + C\gamma_k \quad (6.1.7)$$

Comme γ_k tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut choisir k assez grand pour lequel $2C\gamma_k \leq \varepsilon$. k étant désormais fixé, en utilisant (6.1.6), il existe $n^* \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > n^*$,

$$\|\tilde{u}_n - u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T}^k)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui donne

$$\|\tilde{u}_n - u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 \leq \varepsilon$$

La preuve du premier point est donc complète.

Pour la partie réciproque, supposons que l'injection de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$ est une injection compacte, et montrons l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim \gamma_n = 0$ et telle que (6.1.4) soit satisfaite. Introduisons

$$\gamma_n = \sup_{u \in \mathcal{B}} \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n)}^2 \quad (6.1.8)$$

où \mathcal{B} est la boule unité de l'espace $H_\mu^1(\mathcal{T})$. En utilisant la compacité de la boule \mathcal{B} dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$, il existe une fonction $u_n \in \mathcal{B}$ telle que la condition (6.1.8) soit atteinte, i.e. telle que

$$\gamma_n = \|u_n\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n)}^2 \quad (6.1.9)$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $H_\mu^1(\mathcal{T})$, l'injection de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$ étant compacte par hypothèse, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et il existe $u \in H_\mu^1(\mathcal{T})$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} - u = 0 \quad \text{dans } L_\mu^2(\mathcal{T}) \quad (6.1.10)$$

En appliquant l'inégalité triangulaire à $u_n = u + (u_n - u)$ et la relation (6.1.9), nous obtenons

$$\left| \begin{aligned} \gamma_{\varphi(n)} &\leq 2 \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^{\varphi(n)})}^2 + 2 \|u - u_{\varphi(n)}\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^{\varphi(n)})}^2 \\ &\leq 2 \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^{\varphi(n)})}^2 + 2 \|u - u_{\varphi(n)}\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 \end{aligned} \right. \quad (6.1.11)$$

Nous utilisons alors (6.1.10) et le fait que $\|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^{\varphi(n)})}^2$ tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini pour conclure. \square

Remarque 6.1.4. La partie directe du lemme 6.1.3 est en fait un résultat particulier d'un cas beaucoup plus général démontré par F. Ali Mehmeti et S. Nicaise [AMN93].

Remarque 6.1.5. En fait, il suffit que la suite γ_n vérifiant (6.1.4) admette 0 comme valeur d'adhérence pour avoir compacité de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$. La démonstration sous cette hypothèse moins restrictive se fait de la même manière que la démonstration de la première partie du lemme 6.1.3, *i.e.* dans le cas où la suite entière converge vers 0, mais en considérant la sous-suite $\gamma_{\varphi(n)}$ qui converge vers 0.

Nous nous demandons maintenant sous quelle condition sur μ_i et sur α_i l'existence d'une suite (γ_n) pour l'hypothèse (6.1.4) est satisfaite.

Théorème 6.1.6. *Sous l'hypothèse suivante :*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i < 1 \quad \text{et} \quad \max_{0 \leq i < p} \alpha_i < 1, \quad (6.1.12)$$

il existe une famille $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant (6.1.4). L'injection de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$ est donc compacte.

Démonstration. Quitte à considérer la fonction $u - u(M^*)\Phi$, avec Φ étant une fonction à support compact inclus dans \mathcal{T}^1 telle que $\Phi(M^*) = 1$, nous pouvons supposer que $u(M^*) = 0$.

En procédant comme pour la démonstration de l'inégalité (5.4.6) (il suffit de remplacer $[M]_{p,pj+k}^{n+1}$ par \mathbf{x}), nous établissons l'inégalité :

$$\forall \mathbf{x} \in \Sigma_{p,j}^n, \quad \left| u(\mathbf{x}) - u\left([M]_{p,j}^n\right) \right|^2 \leq C [\alpha \mu^{-1}]_{p,j}^n \int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(y) |u'(y)|^2 dy \quad (6.1.13)$$

Nous multiplions cette relation par $\mu(\mathbf{x})$ et nous intégrons sur $\Sigma_{p,j}^n$, en remarquant que la quantité de droite ne dépend que de $\mu(\mathbf{x})$:

$$\left\| u(\cdot) - u\left([M]_{p,j}^n\right) \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \leq C [\alpha \mu^{-1}]_{p,j}^n \left(\int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(y) |u'(y)|^2 dy \right) \left(\int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \quad (6.1.14)$$

Nous utilisons le fait que

$$\int_{\Sigma_{p,j}^n} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \|\mathbf{1}\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 = [\mu \alpha]_{p,j}^n \|\mathbf{1}\|_{\Sigma}^2$$

ce qui permet de réécrire la majoration (6.1.14) sous la forme (en faisant rentrer $\|\mathbf{1}\|_{\Sigma}^2$ dans la constante C) :

$$\left\| u(\cdot) - u\left([M]_{p,j}^n\right) \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \leq C [\alpha^2]_{p,j}^n \|u'\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \quad (6.1.15)$$

De plus, pour une valeur de n donnée, $[\alpha^2]_{p,j}^n$ est le produit de n facteurs en α_i^2 . Chacun de ces facteurs est majoré par $\max \alpha_i^2$. Nous avons donc la majoration

$$[\alpha^2]_{p,j}^n \left(\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \right)^{2n}$$

Nous utilisons cette majoration dans (6.1.15), et nous sommions sur $0 \leq j < p$ pour avoir

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} \left\| u(\cdot) - u\left([M]_{p,j}^n\right) \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \leq C \left(\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \right)^{2n} \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{G}^n)}^2 \quad (6.1.16)$$

Afin de pouvoir récupérer la norme L_μ^2 sur $\Sigma_{p,j}^n$ de u , nous allons majorer $u([M]_{p,j}^n)$. Pour cela, nous allons tout d'abord réutiliser (5.4.3), en regardant quel chemin doit-on suivre pour aller de M^* à $[M]_{p,j}^n$ et en utilisant le fait que $u(M^*) = 0$. Pour cela, il suffit de constater que, étant donnée une génération ℓ , les points connectés au point $[M]_{p,j}^\ell$ de la génération $\ell + 1$ sont les points $[M]_{p,pj+k}^\ell$, avec $0 \leq k < p$. Donc, en regardant à l'envers, le point $[M]_{p,j}^\ell$ est connecté au point $[M]_{p,\lfloor jp^{-1} \rfloor}^{\ell-1}$, où $\lfloor jp^{-1} \rfloor$ désigne la partie entière de jp^{-1} .

$$\begin{aligned} u([M]_{p,j}^n) &= \sum_{k=0}^{n-1} u([M]_{p,\lfloor jp^{k+1-n} \rfloor}^{k+1}) - u([M]_{p,\lfloor jp^{k-n} \rfloor}^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[M]_{p,\lfloor jp^{k-n} \rfloor}^k}^{[M]_{p,\lfloor jp^{k+1-n} \rfloor}^{k+1}} u'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x (nous pouvons alors constater que si $\lfloor j_0 j_1 \dots j_{n-1} \rfloor$ est l'écriture de j en base p en utilisant n chiffres, $\lfloor j_0 j_1 \dots j_{n-k-1} \rfloor$ est l'écriture de $\lfloor jp^{k-n} \rfloor$ en base p en utilisant $n - k$ chiffres). En faisant une majoration brutale sur (6.1.17), et en utilisant la même inégalité de Cauchy-Schwartz que celle qui a servi à obtenir (5.4.3), et nous avons

$$\left| u([M]_{p,j}^n) \right|^2 \leq Cn \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha\mu^{-1}]_{p,\lfloor jp^{k-n} \rfloor}^k \|u'\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,\lfloor jp^{k-n} \rfloor}^k)}^2 \quad (6.1.18)$$

Nous intégrons cette inégalité sur $\Sigma_{p,j}^n$, et nous sommes sur tous les $\Sigma_{p,j}^n$ pour $0 \leq j < p^n$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p^n-1} \left\| u([M]_{p,j}^n) \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 &= \sum_{j=0}^{p^n-1} |\widehat{\Sigma}| [\alpha\mu]_{p,j}^n \left| u([M]_{p,j}^n) \right|^2 \\ &\leq C'n |\widehat{\Sigma}| \sum_{j=0}^{p^n-1} [\alpha\mu]_{p,j}^n \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha\mu^{-1}]_{p,\lfloor jp^{k-n} \rfloor}^k \|u'\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,\lfloor jp^{k-n} \rfloor}^k)}^2 \\ &\leq C'n |\widehat{\Sigma}| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p^n-1} [\alpha\mu]_{p,j}^n [\alpha\mu^{-1}]_{p,\lfloor jp^{k-n} \rfloor}^k \|u'\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,\lfloor jp^{k-n} \rfloor}^k)}^2 \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

Dans la dernière somme de la relation (6.1.19), nous inversons la somme sur k et la somme sur j , et pour chaque k donné, nous découpons j sous la forme $j = p^{n-k}l + m$, avec $0 \leq l < p^k$ et $0 \leq m < p^{n-k}$, de manière à avoir $\lfloor jp^{k-n} \rfloor = l$. Nous avons donc alors

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} \left\| u([M]_{p,j}^n) \right\|_{\Sigma_{p,j}^n}^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{p^k-1} \sum_{m=0}^{p^{n-k}-1} [\alpha\mu]_{p,p^{n-k}l+m}^n [\alpha\mu^{-1}]_{p,l}^k \|u'\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,l}^k)}^2$$

Nous pouvons décomposer $[\alpha\mu]_{p,p^{n-k}l+m}^n$ sous la forme suivante, en utilisant le corollaire 5.1.6 :

$$[\alpha\mu]_{p,p^{n-k}l+m}^n = [\alpha\mu]_{p,l}^k [\alpha\mu]_{p,m}^{n-k}$$

pour avoir

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} \left\| u([M]_{p,j}^n) \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \leq C'n |\widehat{\Sigma}| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{p^k-1} \sum_{m=0}^{p^{n-k}-1} [\alpha\mu]_{p,m}^{n-k} [\alpha^2]_{p,l}^k \|u'\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,l}^k)}^2$$

ou encore

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} \left\| u([M]_{p,j}^n) \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \leq C' n |\widehat{\Sigma}| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{p^k-1} [\alpha^2]_{p,l}^k \|u'\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,l}^k)}^2 \sum_{m=0}^{p^{n-k}-1} [\alpha\mu]_{p,m}^{n-k}$$

Nous utilisons de nouveaux les hypothèses (6.1.12) et nous utilisons le lemme 5.1.7 pour avoir :

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} \left\| u([M]_{p,j}^n) \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \leq C' n |\widehat{\Sigma}| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{p^k-1} \|u'\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,l}^k)}^2 \left(\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \right)^{2k} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i \right)^{n-k} \quad (6.1.20)$$

Donc

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} \left\| u([M]_{p,j}^n) \right\|_{L_\mu^2(\Sigma_{p,j}^n)}^2 \leq C' n |\widehat{\Sigma}| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \right)^{2k} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i \right)^{n-k} \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{G}^k)}^2 \quad (6.1.21)$$

En utilisant la majoration $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ avec les termes (6.1.16) et (6.1.21), nous avons

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\mu^2(\mathcal{G}^n)}^2 &\leq 2C \left(\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \right)^{2n} \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{G}^n)}^2 \\ &\quad + 2C' n |\widehat{\Sigma}| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \right)^{2k} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i \right)^{n-k} \|u'\|_{L_\mu^2(\mathcal{G}^k)}^2 \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Nous pouvons alors poser

$$\gamma_n = \sum_{n' \geq n} \left(2C \left(\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \right)^{2n'} + 2C' n' |\widehat{\Sigma}| \sum_{k=0}^{n'-1} \left(\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \right)^{2k} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i \right)^{n'-k} \right) \quad (6.1.23)$$

En posant alors

$$\beta = \max \left(\left(\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i \right), \left(\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \right) \right) < 1 \quad \text{par hypothèse (6.1.12)}$$

nous pouvons majorer brutalement (6.1.23) par

$$\sum_{n' \geq n} \left(2C + 2C' (n')^2 |\widehat{\Sigma}| \right) \beta^{n'}$$

Nous constatons alors que γ_n est majoré par le reste d'une série absolument convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers l'infini. \square

Le théorème 6.1.6 nous donne une condition suffisante de compacité. Nous pouvons nous poser la question de savoir ce qui se passe lorsque la condition (6.1.12) n'est pas satisfaite. Le théorème suivant permet de donner une réponse partielle à cette question :

Théorème 6.1.7. *Sous l'hypothèse suivante :*

$$\max_{0 \leq i < p} \alpha_i \geq 1, \quad (6.1.24)$$

l'hypothèse (6.1.4) est fausse, i.e. : il existe une constante C indépendante de n et il existe une suite de fonctions $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H_\mu^1(\mathcal{T})$ telle que

$$\|v_n\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n)} \geq C \|v_n\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})} \quad (6.1.25)$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $0 \leq i_0 < p$ tel que $\alpha_{i_0} \geq 1$. Nous considérons une fonction $\Phi \in H_\mu^1(\widehat{\Sigma})$ non-nulle telle que $\Phi(M^*) = 0$ et $\Phi(M^i) = 0$ pour tout $0 \leq i < p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous construisons la fonction v_n par :

- $v_n = [\mu\alpha]_{p,j_n}^{-n-1} \Phi \left([s]_{p,j_n}^{-n-1}(\cdot) \right)$, où $j_n = \sum_{k=0}^n p^k i_0$ (autrement dit, l'écriture du nombre j_n en base p sur $n+1$ chiffres ne fait intervenir que le chiffre i_0),
- $v_n = 0$ ailleurs.

En utilisant le lemme 5.2.26 avec $m = 0$ et $m = 1$, et le fait que la fonction v_n est à support compact inclus dans Σ_{p,j_n}^{n+1} , nous avons les normes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|v_n\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 = \|\Phi\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}^2 \\ |v_n|_{H_\mu^1(\mathcal{T})}^2 = (\alpha_{i_0})^{-2(n+1)} |\Phi|_{H^1(\widehat{\Sigma})}^2 \end{array} \right. \quad (6.1.26)$$

En utilisant le fait que $\alpha_{i_0} \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons majorer la semi-norme H_μ^1 de v_n donnée par (6.1.26) pour obtenir

$$\|v_n\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})}^2 \leq \|\Phi\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})}^2$$

D'autre part, comme v_n est nulle sur \mathcal{T}^n , la valeur de sa norme L_μ^2 sur \mathcal{T} est la même que sur $\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n$. En utilisant alors la dernière inégalité, nous obtenons

$$\|v_n\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})} \leq \frac{\|\Phi\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})}}{\|\Phi\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}} \|v_n\|_{L_\mu^2(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^n)}$$

Nous obtenons alors la minoration (6.1.25) en posant

$$C = \frac{\|\Phi\|_{L_\mu^2(\widehat{\Sigma})}}{\|\Phi\|_{H_\mu^1(\mathcal{T})}}$$

□

Remarque 6.1.8. Nous pouvons voir que le résultat obtenu par la combinaison du lemme 6.1.3 et des théorèmes 6.1.6 et 6.1.7 est indépendant du résultat obtenu dans le théorème 5.3.20, à savoir que nous pouvons avoir compacité de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$ même si $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. Cependant, dans le cas "bateau" $p = \mu = 1$, si nous nous plaçons dans l'hypothèse du théorème 6.1.6, alors $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$; et si nous nous plaçons dans l'hypothèse du théorème 6.1.7, alors $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$.

La question qui reste ouverte est le cas où chaque $\max(\alpha_i) < 1$ et $\sum \mu_i \alpha_i \geq 1$. Nous ne sommes ni dans le cas du théorème 6.1.6, ni dans le cas du théorème 6.1.7. Actuellement, nous ne savons pas conclure.

Supposons maintenant que nous sommes dans le cas où l'injection de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$ est compacte. Si nous appelons Φ qui à $f \in L_\mu^2(\mathcal{T})$ associe $\Phi(f) \in H_\mu^1(\mathcal{T})$ l'unique solution du problème suivant : trouver $u \in H_\mu^1(\mathcal{T})$ avec $u(M^*) = 1$ telle que, pour tout $v \in H_\mu^1$ avec $v(M^*) = 0$, nous avons :

$$\int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) \left(u'(\mathbf{x}) \overline{v'(\mathbf{x})} + u(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

En utilisant l'alternative de Fredholm [Ram01], et en utilisant le théorème 6.1.6 et le lemme 6.1.3, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 6.1.9. *Sous l'hypothèse*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i < 1 \quad \text{et} \quad \max_{0 \leq i < p} \alpha_i < 1 \quad (6.1.27)$$

il existe deux familles dénombrables discrètes de valeurs propres $\omega_{\mathbf{n}}^n$ et $\omega_{\mathbf{d}}^n$ telles que, pour $\omega \neq \omega_{\mathbf{n}}^n$ (respectivement $\omega_{\mathbf{d}}^n$), le problème $(\mathcal{P}_{\mathbf{N},\omega})$ (respectivement le problème $(\mathcal{P}_{\mathbf{D},\omega})$) est bien posé. De plus, la fonction $\omega \mapsto u(\omega, \cdot) \in \mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ solution $(\mathcal{P}_{\mathbf{N},\omega})$ (respectivement $\omega \mapsto u(\omega, \cdot) \in \mathbf{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ solution de $(\mathcal{P}_{\mathbf{D},\omega})$) est méromorphe sur son domaine de définition à valeurs dans $\mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ (resp. $\mathbf{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$).

Démonstration. Nous allons démontrer ce théorème pour le problème $(\mathcal{P}_{\mathbf{N},\omega})$, la démonstration pour le problème $(\mathcal{P}_{\mathbf{D},\omega})$ se fait de la même manière. L'existence d'une famille dénombrable discrète est donnée par les résultats de l'alternative de Fredholm. Soit maintenant $\omega_0 \in \mathbb{C}$ n'appartenant pas à la famille des $(\omega_{\mathbf{n}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme cette famille forme un ensemble discret de \mathbb{C} , nous pouvons trouver un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule dans \mathbb{C} de centre ω_0 et de rayon ε ne contienne aucun des $\omega_{\mathbf{n}}^n$. Étant donné $\omega \in \mathcal{B}(\omega_0, \varepsilon)$, et étant donné $u(\omega, \cdot)$ la solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathbf{N},\omega})$ à fréquence ω , nous cherchons $\tilde{u}(\omega, \cdot) \in \mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ tel que $\tilde{u}(\omega, M^*) = 0$ et, pour toute fonction $v \in \mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ telle que $v(M^*) = 0$

$$\int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) \left(\tilde{u}'(\omega, \mathbf{x}) \overline{v'(\mathbf{x})} + \omega^2 \tilde{u}(\omega, \mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x} = -2\omega \int_{\mathcal{T}} \mu(\mathbf{x}) u(\omega, \mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} \quad (6.1.28)$$

En utilisant l'alternative de Fredholm, nous avons que le problème (6.1.28) admet une unique solution si et seulement si nous arrivons à démontrer l'unicité de ce problème, qui est obtenue en utilisant l'unicité du problème $(\mathcal{P}_{\mathbf{N},\omega})$ (la forme bilinéaire est la même dans les deux cas). Nous pouvons également voir que, étant donné h tel que $\omega + h \in \mathcal{B}(\omega_0, \varepsilon)$, les fonctions $u(\omega, \cdot)$ et $u(\omega + h, \cdot)$ sont définies de manière unique, et que la fonction $h^{-1}(u(\omega + h, \cdot) - u(\omega, \cdot)) \in \mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$, quand h tend vers 0, tend vers une fonction solution du problème (6.1.28). Par existence et unicité de ce dernier, nous savons ainsi que la fonction $u(\omega, \cdot)$ est dérivable par rapport à ω à dérivée dans $\mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$, donc est méromorphe à valeurs dans $\mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$. \square

En utilisant la proposition 6.1.2, nous pouvons déduire que les familles $(\omega_{\mathbf{n}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\omega_{\mathbf{d}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont sur l'axe réel, et la symétrie du problème par rapport à ω nous donne également la symétrie de ces familles par rapport à $\omega = 0$. La question naturelle que nous pouvons nous poser est : 0 appartient-il à ces familles ?

Corollaire 6.1.10. *Sous les hypothèses du théorème 6.1.9, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, sur la boule centrée en $\omega = 0$ et de rayon ε , la fonction $\omega \mapsto u(\omega, \cdot) \in \mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ solution $(\mathcal{P}_{\mathbf{N},\omega})$ (respectivement $\omega \mapsto u(\omega, \cdot) \in \mathbf{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$ solution de $(\mathcal{P}_{\mathbf{D},\omega})$) est méromorphe.*

Démonstration. Il suffit de prouver le caractère bien posé des problèmes $(\mathcal{P}_{\mathbf{N},\omega})$ et $(\mathcal{P}_{\mathbf{D},\omega})$ pour $\omega = 0$. Or, nous savons que les problèmes $(\mathcal{P}_{\mathbf{N}})$ et $(\mathcal{P}_{\mathbf{D}})$ sont bien posés. Comme nous avons les inclusions $\mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T}) \subset \mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ et $\mathbf{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T}) \subset \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, nous récupérons l'unicité des problèmes $(\mathcal{P}_{\mathbf{N},\omega})$ et $(\mathcal{P}_{\mathbf{D},\omega})$ pour $\omega = 0$. Il nous reste à vérifier l'existence, i.e. que la solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathbf{N}})$ (respectivement la solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathbf{D}})$) est dans $\mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$ (respectivement $\mathbf{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$).

- Pour le problème de Neumann, nous savons que la solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathbf{N}})$ est la fonction $\mathbf{1}$. Comme $\sum \mu_i \alpha_i < 1$, la norme $\|u\|_{L_{\mu}^2(\mathcal{T})}$ est finie, et par suite $u \in \mathbf{H}_{\mu}^1(\mathcal{T})$.
- Pour le problème de Dirichlet, nous avons deux cas possibles. Soit $\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$, et dans ce cas en utilisant le point précédent nous savons que $\mathbf{1} \in \mathbf{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. Soit $\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. En utilisant le fait que $\alpha_i < 1$ pour tout i , et en notant $(r_i)_{0 \leq i < p}$ les rapports de similarité de la solution du

problème de Dirichlet (le lemme 5.3.9 nous assure du caractère auto-similaire de la solution), nous avons

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i |r_i|^2 \alpha_i < \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i |r_i|^2 \alpha_i^{-1}$$

En utilisant alors le théorème 5.2.30, en sachant que la solution du problème (\mathcal{P}_D) n'est pas constante, nous avons le résultat souhaité. \square

Remarque 6.1.11. La question peut être posée de savoir si, dans le cas où l'hypothèse (6.1.27) du théorème 6.1.9 n'est pas satisfaite, nous avons toujours compacité de $H_\mu^1(\mathcal{T})$ dans $L_\mu^2(\mathcal{T})$. Actuellement, nous ne savons répondre que dans certains cas particuliers (par exemple le cas "bateau", détaillé dans la section 6.2.2.1).

6.2 Résolution du problème auto-similaire et construction d'opérateurs DtN

Nous nous intéressons maintenant à ce qui se passe dans le cas d'un réseau auto-similaire. Nous donnerons tout d'abord quelques définitions et propriétés générales dans la section 6.2.1, puis nous détaillerons la résolution dans la section 6.2.2 dans le cas d'une géométrie particulière. Nous verrons que nous pouvons ramener la résolution du problème de Helmholtz sur \mathcal{T} à la résolution d'un problème de Helmholtz posé sur \mathcal{T}^n , modulo l'écriture de conditions Dirichlet-to-Neumann aux endroits de troncature.

6.2.1 Définitions et propriétés générales

Définition 6.2.1 (Fonction quasi-auto-similaire). Cette définition est similaire à la définition 5.2.27. Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$. Nous dirons que la fonction $u : \mathbb{C} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ est quasi-auto-similaire si et seulement si il existe un p -uplet de fonctions $(r_i)_{0 \leq i < p} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que, pour tout $0 \leq i < p$, pour tout $(\omega, \mathbf{x}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{T}$, nous avons

$$u(\omega, s_i(\mathbf{x})) = r_i(\omega) u(\alpha_i \omega, \mathbf{x}) \quad (6.2.1)$$

Proposition 6.2.2. *Les solutions des problèmes $(\mathcal{P}_{N,\omega})$ et $(\mathcal{P}_{D,\omega})$, lorsqu'elles existent, sont quasi-auto-similaires.*

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à la preuve du lemme 5.3.9. \square

Proposition 6.2.3. *Soit \mathcal{T} un réseau p -adique auto-similaire de similitudes $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ de rapports respectifs $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$. Soit u une fonction quasi-auto-similaire de fonctions rapport de similarité $(r_0, r_1, \dots, r_{p-1})$. Alors, nous pouvons calculer la norme de la fonction u sur \mathcal{T} par les formules suivantes :*

$$\|u(\omega, \cdot)\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{p^n-1} \left| \prod_{k=0}^{n-1} r_{(j \bmod p^{k+1})/p^k}([\alpha]_{p,(j \bmod p^{k+1})}^k \omega) \right|^2 \left\| [\alpha \mu]_{p,j}^n \left\| u([\alpha]_{p,j}^n, \cdot) \right\|_{L_\mu^2(\widehat{\mathcal{S}})} \right\|_{L_\mu^2(\widehat{\mathcal{S}})} \quad (6.2.2-(i))$$

$$\|u'(\omega, \cdot)\|_{L_\mu^2(\mathcal{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{p^n-1} \left| \prod_{k=0}^{n-1} r_{(j \bmod p^{k+1})/p^k}([\alpha]_{p,(j \bmod p^{k+1})}^k \omega) \right|^2 \left\| [\alpha^{-1} \mu]_{p,j}^n \left\| u'([\alpha]_{p,j}^n, \cdot) \right\|_{L_\mu^2(\widehat{\mathcal{S}})} \right\|_{L_\mu^2(\widehat{\mathcal{S}})} \quad (6.2.2-(ii))$$

Démonstration. La preuve de cette proposition se fait en utilisant principalement le lemme 5.2.26 et la relation (6.2.1) de la définition 6.2.1. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq j < p^n$, si nous notons $[j_{n-1} \dots j_1 j_0]$ l'écriture de j en base p avec n chiffres, nous avons

$$u(\omega, [s]_{p,j}^n(\mathbf{x})) = r_{j_0}(\omega) r_{j_1}(\alpha_{j_0} \omega) \dots r_{j_{n-1}} \left(\omega \prod_{i=0}^{n-2} \alpha_{j_i} \right) u([\alpha]_{p,j}^n \omega, \mathbf{x})$$

que nous réécrivons sous forme condensée :

$$u(\omega, [s]_{p,j}^n(\mathbf{x})) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} r_{(j \bmod p^{k+1})/p^k}([\alpha]_{p,(j \bmod p^{k+1})}^k \omega) \right) u([\alpha]_{p,j}^n \omega, \mathbf{x})$$

Nous utilisons alors le lemme 5.2.26 pour conclure. \square

Lorsque le problème de Helmholtz est bien posé pour la fréquence ω , nous notons $\lambda_{\mathbf{n}}(\omega)$ la valeur de la dérivée spatiale entrante de la solution dans $H_{\mu}^1(\mathcal{T})$ et $\lambda_{\mathbf{d}}(\omega)$ la valeur de la dérivée spatiale entrante de la solution dans $H_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$. Il est alors très facile de voir que, en notant $\lambda(\omega) = \lambda_{\mathbf{n}}(\omega)$ ou $\lambda(\omega) = \lambda_{\mathbf{d}}(\omega)$, que :

$$u'(\omega, M^*) = \lambda(\omega) u(\omega, M^*) \quad (6.2.3)$$

Il nous reste donc à caractériser cet opérateur $\lambda(\omega)$, en utilisant un cheminement de pensée analogue au cheminement de pensée de la section 5.3.2.2.

Si nous considérons la géométrie de l'exemple 5.2.5, nous pouvons réduire la résolution du problème de Helmholtz ($\mathcal{P}_{N,\omega}$) ou ($\mathcal{P}_{D,\omega}$) de la manière suivante, en résolution la famille de problèmes suivantes : trouver des fonctions $u : \mathbb{C} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ et $(r_i, \lambda) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu(\mathbf{x})u(\omega, \mathbf{x}))' + \omega^2 \mu(\mathbf{x})u(\omega, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{C} \times (N^*M) \\ [\mu u(\omega, \cdot)] = 0 \quad \text{sur } \mathbb{C} \times \{N^*\} \\ u(\omega, M^*) = 1 \quad \text{sur } \mathbb{C} \\ u'(\omega, M^*) = \lambda(\omega) \quad \text{sur } \mathbb{C} \\ u(\omega, M_i) = r_i(\omega) \quad \text{sur } \mathbb{C}, 0 \leq i \leq p-1 \\ u'(\omega, M_i) = \frac{r_i(\omega) \mu_i \lambda(\alpha_i \omega)}{\alpha_i} \quad \text{sur } \mathbb{C}, 0 \leq i \leq p-1 \end{array} \right. \quad (6.2.4)$$

où la solution reconstruite a sa norme 6.2.2 finie. Sur la construction du problème (6.2.4), nous obtenons un résultat de régularité sur r_i et λ dérivant du résultat de régularité obtenu sur $u(\omega, \cdot)$ par le théorème 6.1.9. En particulier, nous avons le lemme suivant, qui jouera un rôle important dans la section suivante :

Lemme 6.2.4. *Sous l'hypothèse du théorème 6.1.9, que nous rappelons ici :*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i < 1 \quad \text{et} \quad \max_{0 \leq i < p} \alpha_i < 1$$

alors il existe $\varepsilon > 0$ telle que la restriction de la fonction λ à la boule $\mathcal{B}(0, \varepsilon)$ soit une fonction analytique et paire.

6.2.2 Restriction du problème pour certains cas particuliers

6.2.2.1 Le cas “bateau”

Nous allons regarder le problème (6.2.4) dans le cas particulier où $\widehat{\Sigma}$ est un segment et où $p = \mu = 1$. Le réseau est donc généré par une seule similitude s de rapport α , et est identifiable au segment $(0, L^* \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n)$, que cette somme soit finie ou non. Dans le cas où $\alpha < 1$, le problème (6.2.4) devient : trouver u telle que

$$\begin{cases} u''(\omega, x) + \omega^2 u(\omega, x) = 0, & x \in (0, L^*) \\ u(\omega, 0) = 1 \\ u'(\omega, 0) = \lambda(\omega) \\ u'(\omega, L^*) = u(\omega, L^*) \frac{\lambda(\alpha\omega)}{\omega} \end{cases} \quad (6.2.5)$$

et telle que les normes définies par les membres de droite de (6.2.2-(i)) et (6.2.2-(ii)) soient finies.

Des trois premières lignes de (6.2.8), nous avons

$$u(\omega, x) = \cos(\omega x) + \frac{\lambda(\omega)}{\omega} \sin(\omega x) \quad (6.2.6)$$

En utilisant la dernière ligne, nous avons

$$\lambda(\omega) \cos(\omega L^*) - \omega \sin(\omega L^*) = \left(\cos(\omega L^*) + \frac{\lambda(\omega)}{\omega} \sin(\omega L^*) \right) \frac{\lambda(\alpha\omega)}{\alpha} \quad (6.2.7)$$

Cette relation admet comme solution les deux fonctions méromorphes ci-dessous, qui correspondent au calcul de $u'(\omega, 0)$ lorsque nous résolvons l'équation de Helmholtz sur le réseau entier avec condition de Neumann ou de Dirichlet à l'infini :

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{n}}(\omega) &= \omega \tan\left(\frac{L^* \omega}{1 - \alpha}\right) \\ \lambda_{\mathbf{d}}(\omega) &= -\omega \cotan\left(\frac{L^* \omega}{1 - \alpha}\right) \end{aligned}$$

et nous voyons que les valeurs de ω pour lequel λ n'est pas défini correspondent aux fréquences de résonance.

Dans le cas où $\alpha \geq 1$, le réseau \mathcal{T} est identifiable à la demi-droite infinie, et les expressions des λ ci-dessus ne conviennent plus. En fait, dans ce cas-là, le “bon” calcul de λ est donné par la fonction

$$\lambda(\omega) = i\omega \operatorname{sign}(\Im(\omega))$$

Nous pouvons alors voir que cette fonction est discontinue sur tout l'axe réel.

6.2.2.2 Le cas d'un arbre p -adique

Nous allons regarder le problème (6.2.4) dans le cas particulier de la géométrie de l'exemple 5.2.5, où $L_i = 0$ pour tout i et dans le cas particulier où le poids μ est constant. Le problème (6.2.4) se résume à trouver u et λ tels que

$$\begin{cases} u''(\omega, \mathbf{x}) + \omega^2 u(\omega, \mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \mathbb{C} \times (N^*M) \\ u(\omega, M^*) = 1 & \text{sur } \mathbb{C} \\ u'(\omega, M^*) = \lambda(\omega) & \text{sur } \mathbb{C} \\ u'(\omega, N^*) = u(\omega, N^*) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i \lambda(\alpha_i \omega)}{\alpha_i} \end{cases} \quad (6.2.8)$$

et tels que les normes définies par les membres de droite de (6.2.2-(i)) et (6.2.2-(ii)) soient finies.

Des trois premières lignes de (6.2.8), nous avons, en utilisant l'abscisse curviligne x avec $x = 0$ en M^* et $x = L^*$ en N^* :

$$u(\omega, x) = \cos(\omega x) + \frac{\lambda(\omega)}{\omega} \sin(\omega x) \quad (6.2.9)$$

nous utilisons la relation (6.2.8) avec $x = L^*$ pour la quatrième ligne de (6.2.4) :

$$\lambda(\omega) \cos(\omega L^*) - \omega \sin(\omega L^*) = \left(\cos(\omega L^*) + \frac{\lambda(\omega)}{\omega} \sin(\omega L^*) \right) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i \lambda(\alpha_i \omega)}{\alpha_i} \quad (6.2.10)$$

Nous obtenons ainsi une relation quadratique sur λ . En utilisant le lemme 6.2.4, nous savons qu'il existe une famille $(\lambda_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, sur une boule au voisinage de $\omega = 0$,

$$\lambda(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n} \omega^{2n} \quad (6.2.11)$$

Nous développons également les fonctions $\omega \mapsto \cos(\omega L^*)$ et $\omega \mapsto \sin(\omega L^*)$:

$$\begin{aligned} \cos(\omega L^*) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega L^*)^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(\omega L^*) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega L^*)^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

En injectant ces différents développements dans (6.2.10), nous avons

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n} \omega^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega L^*)^{2n}}{(2n)!} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega (\omega L^*)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega L^*)^{2n}}{(2n)!} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n} \omega^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{L^* (\omega L^*)^{2n}}{(2n+1)!} \right) \right) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{2n} (\alpha_i \omega)^{2n} \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Nous identifions alors les coefficients de (6.2.12) suivant une même puissance de ω , et nous avons

- pour la puissance 0 de ω , nous obtenons la relation

$$\lambda_0 = (1 + \lambda_0 L^*) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} \lambda_0 \quad (6.2.13)$$

Nous pouvons voir que cette relation n'est autre que la relation (5.3.24) pour le cas particulier que nous considérons ici (nous rappelons que μ est constant sur $(M^* N^*)$ et que $L_i = 0$ pour tout i). Nous savons que la relation quadratique (6.2.13) admet deux solutions : $\lambda_0 = 0$, la fonction u associée satisfait les conditions de norme finie ; et $\lambda_0 = \frac{1 - \sum \mu_i \alpha_i^{-1}}{L^* \sum \mu_i \alpha_i^{-1}}$, la fonction u associée satisfait les conditions de norme finie si et seulement si $\sum \mu_i \alpha_i^{-1} > 1$ (autrement dit, en utilisant un argument similaire au théorème 5.3.20, si et seulement si $H_{\mu}^1(\mathcal{T}) \neq H_{\mu,0}^1(\mathcal{T})$).

De plus, nous savons que les fonctions λ et r_i sont analytiques sur la boule de centre 0 et de rayon ε . À partir du moment où les relations (6.2.2-(i)) et (6.2.2-(ii)) sont vérifiées pour $\omega = 0$, quitte à prendre une valeur de ε plus petite, elles sont vérifiées sur la boule $\mathcal{B}(0, \varepsilon)$.

- pour une puissance $2n$ de ω , avec $n > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& (-1)^n (L^*)^{2n-1} + \lambda_{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \lambda_{2k} \frac{(L^*)^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \\
& = \lambda_{2n} (1 + \lambda_0 L^*) \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i^{2n-1} + \lambda_{2n} L^* \lambda_0 \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i^{-1} \\
& + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{2k} \sum_{l=0}^{n-1-k} (-1)^{n-k-l} \frac{(L^*)^{2(n-k-l)+1}}{(2(n-k-l)+1)!} \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i^{l-1} \lambda_{2l}
\end{aligned} \tag{6.2.14}$$

Nous obtenons une équation du premier ordre. Les hypothèses du lemme 6.2.4 nous permettent de démontrer le caractère bien posé de cette équation.

Nous pouvons donc, étant donné la valeur en $\omega = 0$ et en utilisant le fait que la solution du problème de Helmholtz est paire et analytique par rapport à ω (et, par extension, la fonction λ est également paire et analytique), construire la fonction λ . Plus précisément :

Théorème 6.2.5. *Étant donné λ_0 satisfaisant (6.2.13), il existe une unique fonction paire et méromorphe λ satisfaisant (6.2.10) telle que $\lambda(0) = \lambda_0$.*

Démonstration. En utilisant les propriétés sur les fonctions méromorphes (que nous pouvons trouver par exemple dans [Lan99]), il suffit démontrer l'existence et l'unicité sur une boule de centre 0 et de rayon ε . Si λ est une fonction paire et méromorphe satisfaisant $\lambda(0) = \lambda_0$, alors la relation (6.2.14) nous donne l'unicité des coefficients λ_{2n} .

Inversement, soit la fonction $\lambda : \omega \mapsto \sum \lambda_{2n} \omega^{2n}$, où le coefficient λ_{2n} est défini par (6.2.14). Nous voyons clairement que $\lambda(0) = \lambda_0$. Pour montrer que λ est une fonction analytique par rapport à la variable complexe, il suffit de déterminer deux constantes M et γ telles que

$$|\lambda_{2n}| \leq M \gamma^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{6.2.15}$$

Or, nous avons la relation affine (6.2.14), où le coefficient devant λ_{2n} peut être bornée inférieurement par une quantité $C > 0$ ne dépendant pas de n . Nous allons supposer que la majoration (6.2.15) que nous avons est vérifiée pour tout $k < n$, nous pouvons alors majorer le second membre de (6.2.14) (i.e les termes ne dépendant pas de λ_{2n}) par

$$(L^*)^{2n-1} + M \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k \frac{(L^*)^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} + M^2 \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k \sum_{l=0}^{n-1-k} \gamma^l \frac{(L^*)^{2(n-k-l)+1}}{(2(n-k-l)+1)!} \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i^{l-1} \tag{6.2.16}$$

Un choix naturel pour γ est de prendre $\gamma = \beta(L^*)^2$, avec $\beta \geq 1$. En utilisant le fait que $\beta \geq 1$, nous pouvons majorer la relation (6.2.16) par

$$\beta^{n-1} (L^*)^{2n-1} + M \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{n-1} (L^*)^{2k} \frac{(L^*)^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} + M^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} \beta^{n-1} (L^*)^{2(k+l)} \frac{(L^*)^{2(n-k-l)+1}}{(2(n-k-l)+1)!} \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i^{l-1} \tag{6.2.17}$$

Il faut donc majorer la relation (6.2.17) par $C^{-1} M \beta^n (L^*)^{2n}$, avec M indépendant de n . Nous obtenons alors, après simplification par $\beta^{n-1} (L^*)^{2n}$:

$$(L^*)^{-1} + M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2(n-k))!} + M^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} \frac{1}{(2(n-k-l)+1)!} \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha_i^{l-1} \leq C^{-1} M \beta \tag{6.2.18}$$

Nous majorons la simple somme sur k de (6.2.18) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2(n-k))!} &= \sum_{k'=1}^n \frac{1}{(2k')!} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} \\ &\leq \exp(1) \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

Pour la majoration de la triple somme sur k, l, i , nous fixons un $i \in \{0, \dots, p-1\}$, et nous faisons des changements d'indices et de sommes.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} \frac{1}{(2(n-k-l)+1)!} \alpha_i^l &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l'=1}^{n-k} \frac{1}{(2l'+1)!} \alpha_i^{n-k-l'} \\ &= \sum_{l'=1}^n \sum_{k=0}^{n-l'} \frac{1}{(2l'+1)!} \alpha_i^{n-k-l'} \\ &= \sum_{l'=1}^n \sum_{k'=0}^{n-l'} \frac{1}{(2l'+1)!} \alpha_i^{k'} \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Sous l'hypothèse $\alpha_i < 1$, nous pouvons majorer la double somme (6.2.20) écrite sous la dernière forme par

$$\sum_{l'=1}^n \sum_{k'=0}^{n-l'} \frac{1}{(2l'+1)!} \alpha_i^{k'} \leq \frac{\exp(1)}{1-\alpha_i} \quad (6.2.21)$$

Nous pouvons alors, en utilisant (6.2.19) et (6.2.21), majorer le membre de gauche de (6.2.18) par

$$(L^*)^{-1} + M \exp(1) + M^2 \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i \alpha_i \exp(1)}{1-\alpha_i} \quad (6.2.22)$$

Il suffit donc d'avoir la majoration

$$(L^*)^{-1} + M \exp(1) + M^2 \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mu_i \alpha_i \exp(1)}{1-\alpha_i} \leq MC^{-1} \beta \quad (6.2.23)$$

Nous prenons alors $M = \max(1, |\lambda_0|)$, et β satisfaisant (6.2.23). \square

6.3 Calculs numériques de l'opérateur DtN λ

Pour le cas de figure de la section 6.2.2.2, nous calculons la fonction $\lambda(\omega)$ sur une boule de centre 0 et de rayon ω_0 en utilisant la méthode suivante :

- sur la boule de centre 0 et de rayon $\delta\omega$, où $\delta\omega$ est un petit paramètre que nous fixons, nous utilisons une approximation à l'ordre $2k$ du développement basse fréquence de la fonction λ donnée par (6.2.11), où les coefficients de ce développement vérifient (6.2.13, 6.2.14),
- à l'extérieur de cette boule, nous utilisons la formule (6.2.10) pour calculer λ , en utilisant une interpolation pour calculer les différents $\lambda(\alpha_i \omega)$

Nous pouvons voir que la relation (6.2.10) permet de calculer $\lambda(\omega)$ sur l'axe $\arg(\omega) = cte$. La méthode de calcul que nous faisons intervenir est séquentielle sur $|\omega|$, et est parallèle sur $\arg(\omega)$. Nous parallélisons en utilisant la bibliothèque OPENMP¹ et nous visualisons à l'aide de MATLAB.

6.3.1 Résultats qualitatifs pour la fonction $\lambda_{\mathbf{d}}$

Nous traçons dans le plan complexe la partie réelle de $\lambda(\omega)$ et la partie imaginaire de $\lambda(\omega)$, où le coefficient $\lambda(0)$ est égal au coefficient obtenu pour le problème de Laplace avec condition de Dirichlet à l'infini (\mathcal{P}_D) (en s'assurant que la condition (5.3.26) était satisfaite). Nous avons fait tous les calculs numériques avec $L^* = 1$ (en utilisant un argument de similarité, il est possible de se ramener à une valeur quelconque de L^*) et $k = 1$, *i.e.* nous considérons l'approximation d'ordre 2 de la fonction $\lambda(\omega)$ sur la boule à l'origine de rayon $\delta\omega$.

Nous avons d'abord regardé (voir figure 6.1) ce que donne la fonction $\lambda(\omega)$ dans le cas d'un réseau diadique symétrique, où de plus la relation $\sum \mu_i \alpha_i < 1$ est satisfaite.

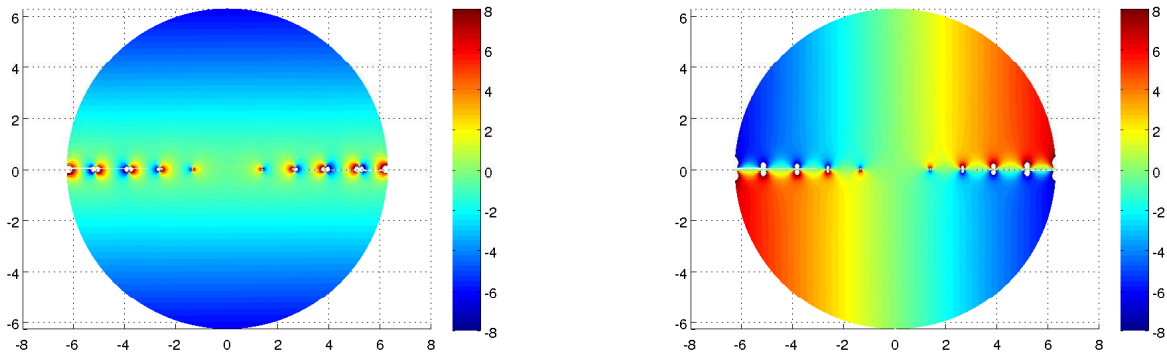


FIGURE 6.1 – Tracé de la partie réelle de $\lambda_{\mathbf{d}}(\omega)$ et de la partie imaginaire de $\lambda_{\mathbf{d}}(\omega)$ - les jeux de paramètres sont $p = 2$, $\mu_0 = \mu_1 = 0.6$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0.6$, et $\delta\omega = \frac{\pi}{20}$

Nous avons regardé ce que donne ensuite la fonction $\lambda(\omega)$ dans le cas d'un réseau non-nécessairement symétrique (voir figure 6.2), et non-nécessairement diadique (voir figure 6.3).

Nous pouvons constater plusieurs propriétés sur la fonction $\lambda_{\mathbf{d}}(\omega)$:

- $\overline{\lambda_{\mathbf{d}}(\omega)} = \lambda_{\mathbf{d}}(\overline{\omega})$. Cette propriété est due au fait que sur la boule de centre 0 et de rayon $\delta\omega$, la troncature à l'ordre 2 de la fonction $\lambda(\omega)$, et que l'équation fonctionnelle (6.2.10) est à coefficients réels.
- Nous pouvons également constater que plus le maximum des α_i s'approche de 1, plus le nombre de pôle sur la boule donnée de rayon 2π est important. Nous pouvons mettre ce résultat en corrélation avec le théorème 6.1.7.

6.3.2 Étude de la singularité de $\lambda_{\mathbf{n}}$ due à la géométrie

Lorsque nous calculons le développement à l'ordre 2 de la fonction $\lambda_{\mathbf{n}}(\omega)$, nous obtenons, en utilisant (6.2.14)

1. <http://openmp.org/wp/>

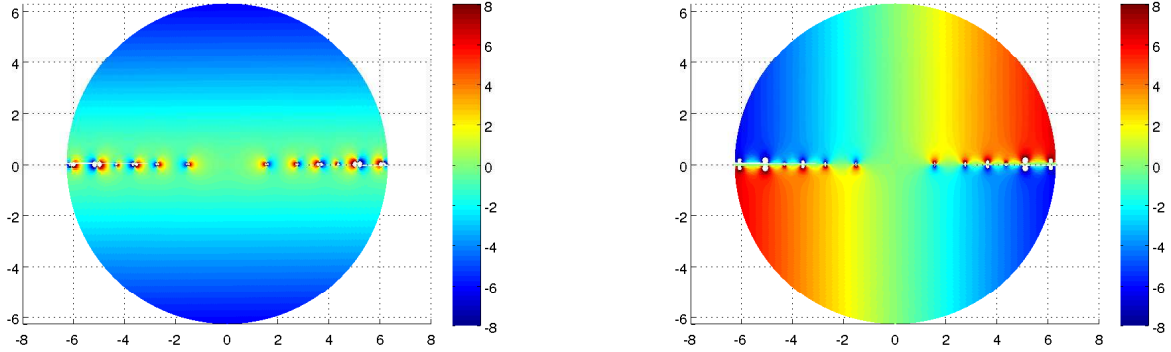


FIGURE 6.2 – Tracé de la partie réelle de $\lambda_{\mathbf{d}}(\omega)$ et de la partie imaginaire de $\lambda_{\mathbf{d}}(\omega)$ - les jeux de paramètres sont $p = 3$, $\mu_0 = \alpha_0 = 0.4$, $\mu_1 = \alpha_1 = 0.6$, et $\delta\omega = \frac{\pi}{20}$

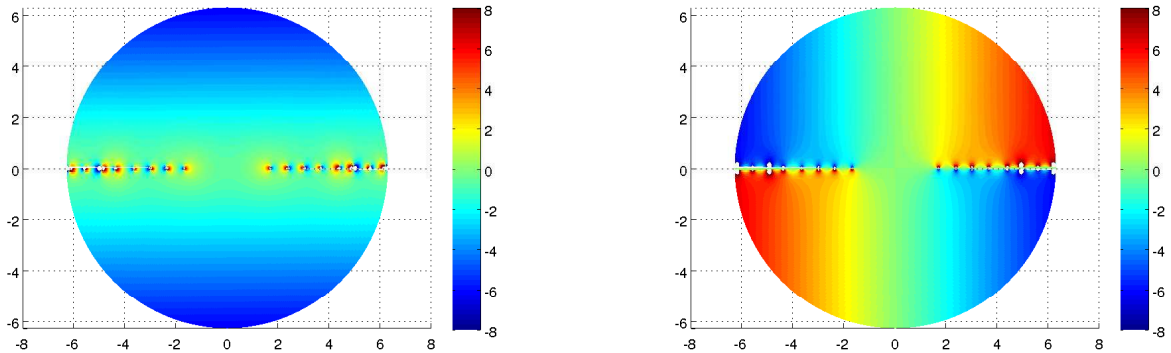


FIGURE 6.3 – Tracé de la partie réelle de $\lambda_{\mathbf{d}}(\omega)$ et de la partie imaginaire de $\lambda_{\mathbf{d}}(\omega)$ - les jeux de paramètres sont $p = 3$, $\mu_0 = \alpha_0 = 0.1$, $\mu_1 = \alpha_1 = 0.2$, $\mu_2 = \alpha_2 = 0.8$, et $\delta\omega = \frac{\pi}{50}$

$$\lambda_{\mathbf{n}}(\omega) = \frac{L^*}{p-1} \omega^2 + O(\omega^4) \quad (6.3.1)$$

$$1 - \sum_{i=0} \mu_i \alpha_i$$

Nous constatons que le coefficient devant le terme en ω^2 est positif si et seulement si $\sum \mu_i \alpha_i < 1$ (donc si la première hypothèse du théorème 6.1.6 est satisfaite). Afin de simplifier l'étude numérique, nous nous plaçons dans le cas d'un arbre diadique 2-géométrique symétrique (*i.e.* $p = 2$ et $\mu_0 = \mu_1 = \alpha_0 = \alpha_1$). La valeur α pour lequel la première hypothèse du théorème 6.1.6 est $2\alpha^2 = 1$, soit $\alpha = \sqrt{2}/2$.

Nous pouvons déjà voir sur la figure 6.4 que quand nous prenons α proche de la valeur critique, la première singularité de $\lambda_{\mathbf{n}}$ sur l'axe réel se rapproche de $\omega = 0$. Nous avons donc choisi de faire un calcul plus précis dans cette zone, en prenant des valeurs de α de plus en plus proches de la valeur critique. Nous obtenons alors le graphe de la figure 6.5.

Le résultat obtenu aurait tendance à nous dire que si $\sum \mu_i \alpha_i \geq 1$, alors nous sommes dans le cadre où il n'y a pas compacité de $H_{\mu}^1(\mathcal{T})$ dans $L_{\mu}^2(\mathcal{T})$.

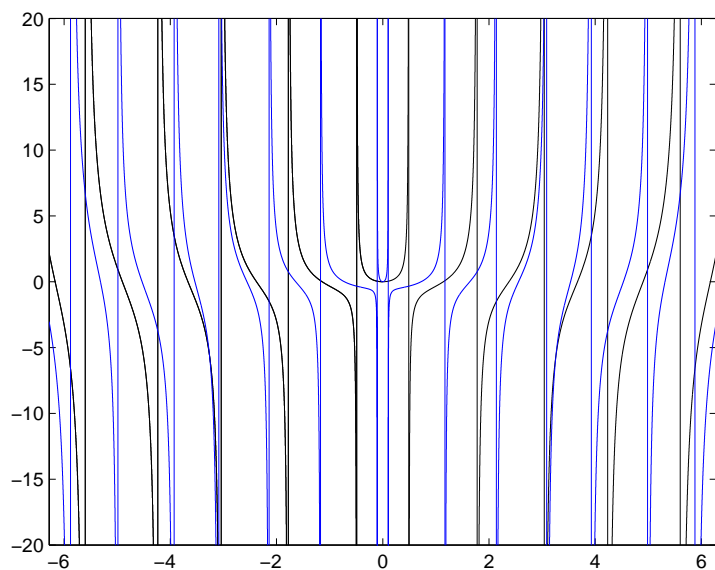


FIGURE 6.4 – Tracé de $\lambda_n(\omega)$ - les jeux de paramètres sont $\alpha = 0.6$ (courbe noire) et $\alpha = 0.7$ (courbe bleue), et $\delta\omega = \frac{\pi}{200}$

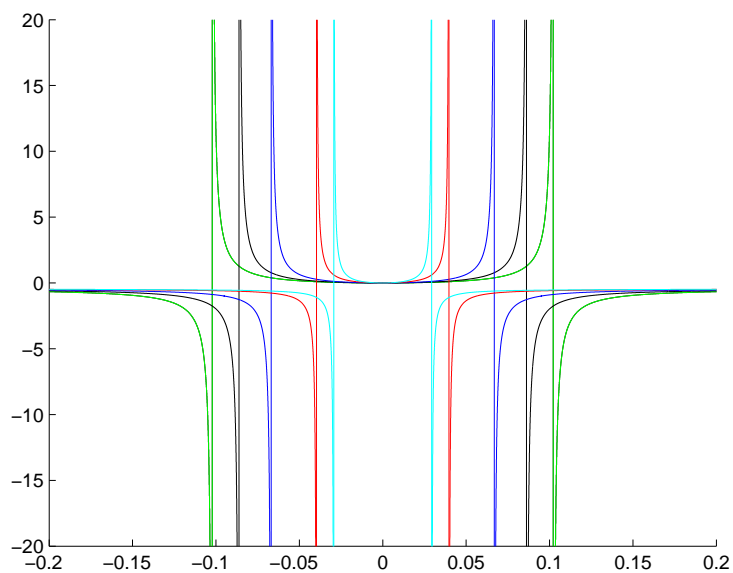


FIGURE 6.5 – Tracé de $\lambda_n(\omega)$ - les jeux de paramètres sont $\alpha = 0.7$ (courbe verte), $\alpha = 0.702$ (courbe noire), $\alpha = 0.704$ (courbe bleue), $\alpha = 0.706$ (courbe rouge) et $\alpha = 0.7065$ (courbe bleue cyan); et $\delta\omega = \frac{\pi}{2000}$

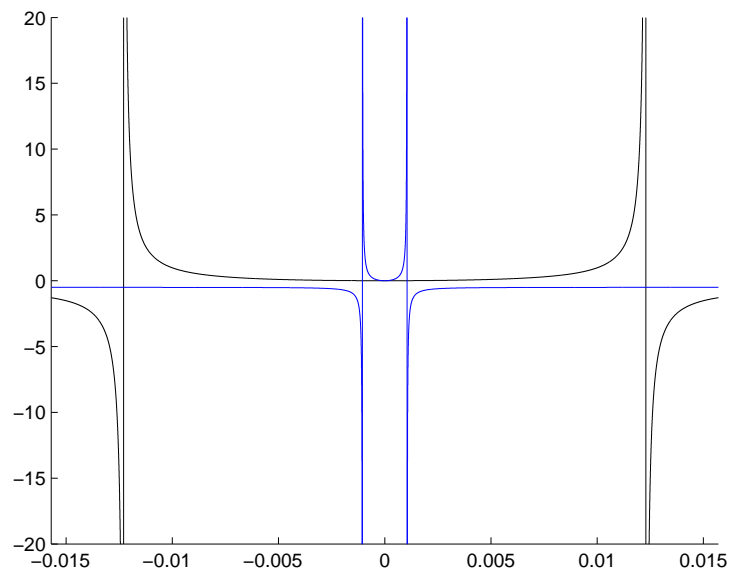


FIGURE 6.6 – Tracé de $\lambda_n(\omega)$ - les jeux de paramètres sont $\alpha = 0.707$ (courbe noire) et $\alpha = 0.707106$ (courbe bleue), et $\delta\omega = \frac{\pi}{2000000}$

Résolution du problème d'onde acoustique dans un réseau fractal

Résumé

Nous savons que pour presque toute fréquence ω fixée, nous pouvons ramener la résolution du problème de Helmholtz posé sur le réseau \mathcal{T} à la résolution du problème de Helmholtz posé sur \mathcal{T}^n modulo l'écriture de conditions DtN exactes au bout de la $n^{\text{ème}}$ génération. Le problème qui se pose si nous voulons revenir en domaine temporel est que cet opérateur n'est pas facilement inversible. À la place, nous allons utiliser une troncature de notre opérateur DtN, qui nous permettra d'écrire un problème posé en temps. Nous démontrons dans la section 7.1 que le problème en régime temporel conserve une énergie bornée sous certaines conditions. Nous montrons ensuite dans la section 7.2 des simulations qualitatives et quantitatives effectuées sur le problème temporel.

Sommaire

7.1	Caractère bien posé du problème en temporel	173
7.2	Résolution numérique	176
7.2.1	Résultats qualitatifs pour le modèle temporel	176
7.2.2	Résultats quantitatifs pour le modèle temporel	177
7.2.3	Test de l'instabilité pour le problème de Neumann	177

7.1 Caractère bien posé du problème en temporel

Toujours dans le cas de figure de la section 6.2.2.2, nous pouvons voir que nous pouvons remplacer la résolution sur chaque $[s]_{p,j}^n(\mathcal{T})$ par une écriture d'opérateur Dirichlet-to-Neumann analogue à l'écriture (6.2.3), puisque $[s]_{p,j}^n(\mathcal{T})$ est homothétique à l'arbre \mathcal{T} . Nous utilisons le développement basse fréquence de λ donné par (6.2.11) - en effet, plus nous couperons loin dans l'arbre, plus la fréquence qui sera vue par la partie coupée sera vue comme petite. En chaque point $[M]_{p,j}^n$ (il y a p^{n-1} points distincts de par la nature de la géométrie), nous considérons chacun des p sous-arbres $[s]_{p,j}^n(\mathcal{T})$ qui partent, nous remplaçons par le développement tronqué à l'ordre $2m$ de lambda, et nous utilisons la loi de Kirchhoff en ce point, pour écrire une relation sous la forme

$$u'(\omega, [M]_{p,j}^n) = \left(\sum_{m'=0}^m \lambda_{2m'}([M]_{p,j}^n) \omega^{2m'} \right) u(\omega, [M]_{p,j}^n), \quad 0 \leq j < p^{n-1} \quad (7.1.1)$$

Nous remplaçons alors la résolution de l'équation de Helmholtz sur \mathcal{T} par la résolution de l'équation de Helmholtz sur \mathcal{T}^{n-1} et l'utilisation des opérateurs DtN approchés d'ordre $2m = 2$ donnés par (7.1.1),

i.e. : trouver $u \in H_\mu^1(\mathcal{T})$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu u)' + \omega^2 \mu u = 0, \quad \text{dans } \mathcal{T}^{n-1} \\ [\mu u]'([M]_{p,j}^l) = 0, \quad 1 \leq l \leq n-1, \quad 0 \leq j < p^{l-1} \\ \frac{\partial u}{\partial n}([M]_{p,j}^n) = \lambda_0([M]_{p,j}^n)u([M]_{p,j}^n) + \lambda_2([M]_{p,j}^n)\omega^2 u([M]_{p,j}^n), \quad 0 \leq j < p^{n-1} \end{array} \right. \quad (7.1.2)$$

Afin d'obtenir un modèle temporel, nous remplaçons ω^2 par $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, et nous pouvons écrire le problème temporel sous la forme : trouver $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, H_\mu^1(\mathcal{T}^{n-1})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, L_\mu^2(\mathcal{T}^{n-1}))$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) - (\mu u)'(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \text{pour } (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{T}^{n-1} \\ [\mu u]'(t, [M]_{p,j}^l) = 0, \quad 1 \leq l \leq n-1, \quad 0 \leq j < p^{l-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t, [M]_{p,j}^n) = \lambda_0([M]_{p,j}^n)u(t, [M]_{p,j}^n) - \lambda_2([M]_{p,j}^n)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, [M]_{p,j}^n), \quad 0 \leq j < p^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \quad (7.1.3)$$

auquel nous rajoutons des conditions en $t = 0$ et des conditions au bord M^* . Nous allons considérer le problème avec condition de Neumann en $\mathbf{x} = M^*$, et nous allons démontrer quelques résultats sur le modèle temporel.

Proposition 7.1.1. *En notant, pour $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, H_\mu^1(\mathcal{T}^{n-1})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, L_\mu^2(\mathcal{T}^{n-1}))$, $\mathcal{E}^n(v)$ la quantité donnée par*

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{E}^n(v)(t) = \int_{\mathcal{T}^{n-1}} \mu(\mathbf{x}) \left(\left| \frac{\partial v}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + |v'(t, \mathbf{x})|^2 \right) \\ - \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} \mu([M]_{p,j}^n) \lambda_0([M]_{p,j}^n) \left| v(t, [M]_{p,j}^n) \right|^2 \\ + \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} \mu([M]_{p,j}^n) \lambda_2([M]_{p,j}^n) \left| \frac{\partial v}{\partial t}(t, [M]_{p,j}^n) \right|^2 \end{array} \right. \quad (7.1.4)$$

Alors, pour la solution u du problème (7.1.3) avec condition de Neumann homogène en M^* , cette quantité est indépendante du temps.

Démonstration. La preuve de cette proposition se fait de manière classique. Nous considérons $\mathcal{E}^n(u)(t)$, où u est la solution du problème (7.1.3) avec condition de Neumann homogène en M^* , et nous dérivons cette quantité par rapport au temps. Nous obtenons alors

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}^n(u)}{\partial t}(t) = \int_{\mathcal{T}^{n-1}} \mu(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) + u'(t, \mathbf{x}) \frac{\partial u'}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right) \\ - \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} \mu([M]_{p,j}^n) \lambda_0([M]_{p,j}^n) u(t, [M]_{p,j}^n) \frac{\partial u}{\partial t}(t, [M]_{p,j}^n) \\ + \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} \mu([M]_{p,j}^n) \lambda_2([M]_{p,j}^n) \frac{\partial u}{\partial t}(t, [M]_{p,j}^n) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, [M]_{p,j}^n) \end{array} \right. \quad (7.1.5)$$

Nous faisons alors une intégration par parties sur chaque segment $([M]_{p,l}^j [M]_{p,l+1}^{pj+k})$ en utilisant la condition de Neumann en M^* pour avoir :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}^n(u)}{\partial t}(t) &= \int_{\mathcal{T}^{n-1}} \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) - (\mu(\mathbf{x}) u'(t, \mathbf{x}))' \frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \\
 &+ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} [\mu u'](t, [M]_{p,j}^l) \frac{\partial u}{\partial t}(t, [M]_{p,j}^l) \\
 &- \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} \mu([M]_{p,j}^n) \lambda_0([M]_{p,j}^n) u(t, [M]_{p,j}^n) \frac{\partial u}{\partial t}(t, [M]_{p,j}^n) \\
 &+ \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} \mu([M]_{p,j}^n) \lambda_2([M]_{p,j}^n) \frac{\partial u}{\partial t}(t, [M]_{p,j}^n) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, [M]_{p,j}^n) \\
 &+ \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} \mu([M]_{p,j}^n) \frac{\partial u}{\partial t}(t, [M]_{p,j}^n) \frac{\partial u}{\partial n}(t, [M]_{p,j}^n)
 \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

Nous utilisons la première ligne de (7.1.3) pour éliminer la première ligne de la relation (7.1.6). Nous utilisons ensuite la seconde ligne de (7.1.3) et le fait que u soit une fonction continue en espace pour éliminer la seconde ligne de la relation (7.1.6). Finalement, nous réorganisons les lignes 3 à 5 de (7.1.6), et nous utilisons la troisième ligne de (7.1.3), pour avoir

$$\frac{\partial \mathcal{E}^n(u)}{\partial t}(t) = 0$$

ce qui achève la démonstration. □

En regardant l'énergie définie par (7.1.4), une condition nécessaire pour avoir une majoration L^∞ de la dérivée de la solution u par rapport au temps est : pour tout $0 \leq j, p^{n-1}$, nous devons avoir $\lambda_0([M]_{p,j}^n) \leq 0$ et $\lambda_2([M]_{p,j}^n) \geq 0$. En fait, nous pouvons constater que cette condition est une condition également nécessaire, en utilisant un argument similiaire à l'argument de la proposition suivant :

Proposition 7.1.2. *Considérons le système suivant : trouver $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, H_{loc}^1(\mathbb{R}_-^*)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, L_{loc}^2(\mathbb{R}_-^*))$ telle que*

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= 0, \quad t > 0, \quad x < 0 \\
 u(0, x) &= u_0(x), \quad x < 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= 0, \quad x < 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= \lambda_0 u(t, 0) - \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, 0), \quad t > 0
 \end{aligned} \right. \tag{7.1.7}$$

où $u_0 \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_-^*)$ est à support dans $] -\infty, -a]$, avec $a > 0$, et où $(\lambda_0, \lambda_2) \in \mathbb{R}$. Si $\lambda_0 > 0$ ou si $\lambda_2 < 0$, alors la norme $\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_-^*)}$ de la solution croît exponentiellement avec t .

Démonstration. Pour $t < a$, nous avons l'écriture de la solution u du problème (7.1.7) en utilisant la formule de d'Alembert :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u_0(x - t) + u_0(x + t)) \tag{7.1.8}$$

La question que nous nous posons alors est : comment étendre u_0 sur l'axe $x > 0$ pour que la formule (7.1.8) reste vraie pour $t \geq a$, tout en gardant le fait que u est solution de (7.1.7)? Il est clair que quelle que soit l'extension H_{loc}^1 sur \mathbb{R}_+ de la fonction u_0 que nous prenons, la fonction u associée vérifiera les trois premières lignes de (7.1.7). La question peut cependant être posée pour la quatrième ligne : en remplaçant u par la formule (7.1.8), nous voyons que u_0 doit satisfaire l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\lambda_2 u_0''(t) + u_0'(t) - \lambda_0 u_0(t) = \lambda_2 u_0''(-t) - u_0'(-t) - \lambda_0 u_0(-t) \quad (7.1.9)$$

Dans la suite de la preuve, nous supposons $\lambda_2 \neq 0$ (si $\lambda_2 = 0$, l'équation différentielle du second ordre (7.1.9) est en fait une équation différentielle du premier ordre - nous pouvons alors voir que cette équation différentielle n'admet pas de mode exponentiellement croissant si $\lambda_0 \geq 0$). Nous cherchons les modes propres de (7.1.9) sous la forme $u_0(t) = \exp(\gamma t)$, où $\gamma \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. En injectant ce mode propre, nous avons la relation quadratique suivante :

$$\lambda_2 \gamma^2 + \gamma - \lambda_0 = 0 \quad (7.1.10)$$

Si $\lambda_2 \lambda_0 > 0$, ce qui arrive dès lors que $\lambda_0 > 0$ ou $\lambda_2 < 0$, alors l'équation (7.1.10) admet deux racines de signes opposés, donc une de ces racines est strictement positive. Supposons maintenant que $\lambda_2 \lambda_0 \leq 0$. Le discriminant est $\Delta = 1 + 4\lambda_2 \lambda_0$. Nous avons deux possibilités :

- le discriminant est négatif ou nul : nous avons deux racines complexes conjuguées (éventuellement égales)

$$\gamma_1 = \frac{-1 - i\sqrt{-4\lambda_2 \lambda_0 - 1}}{2\lambda_2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{-1 + i\sqrt{-4\lambda_2 \lambda_0 - 1}}{2\lambda_2}$$

Le signe de la partie réelle de ces deux racines est l'opposé du signe de λ_2 : si $\lambda_2 < 0$ (ou si $\lambda_0 > 0$, ce qui revient au même car $\lambda_0 \lambda_2 < 0$), alors la partie réelle est strictement positive, et le mode associé est exponentiellement croissant ;

- le discriminant est strictement positif : nous avons deux racines réelles

$$\gamma_1 = \frac{-1 - \sqrt{4\lambda_2 \lambda_0 + 1}}{2\lambda_2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{-1 + \sqrt{4\lambda_2 \lambda_0 + 1}}{2\lambda_2}$$

Le produit de ces deux racines vaut $-\lambda_0/\lambda_2$, qui est donc positif, et la première racine a son signe qui est l'opposé du signe de λ_2 . On conclut alors de la même manière que pour le premier cas. \square

7.2 Résolution numérique

7.2.1 Résultats qualitatifs pour le modèle temporel

De la même manière que pour la résolution du problème temporel décrit dans la section 4.4, nous avons rajouté l'implémentation des conditions DtN données par la troisième ligne de (7.1.3), en implicitant le terme en $\lambda_0([M]_{p,j}^n)u(t, [M]_{p,j}^n)$ avec un θ -schéma en prenant comme valeur $\theta = \frac{1}{4}$, et nous utilisons GNUPLOT¹ pour tracer les instantanés de la solution en un point donné du réseau.

Nous avons tracé sur la figure 7.1 les instantanés $u(t, \mathbf{x})$ en fonction de t , pour \mathbf{x} se situant au milieu du segment $\widehat{\Sigma}$, pour une donnée de Cauchy étant égale à une donnée de Gaussienne à support compact dans $\widehat{\Sigma}$, centrée en \mathbf{x} et se déplaçant vers les générations suivantes de l'arbre, pour différents ordres de la condition de Dirichlet (condition d'ordre 0 sur la partie gauche de la figure, et condition d'ordre 2 sur la partie droite de la figure), pour différentes valeurs de n , pour les valeurs $p = 2$ et

1. <http://www.gnuplot.info/>

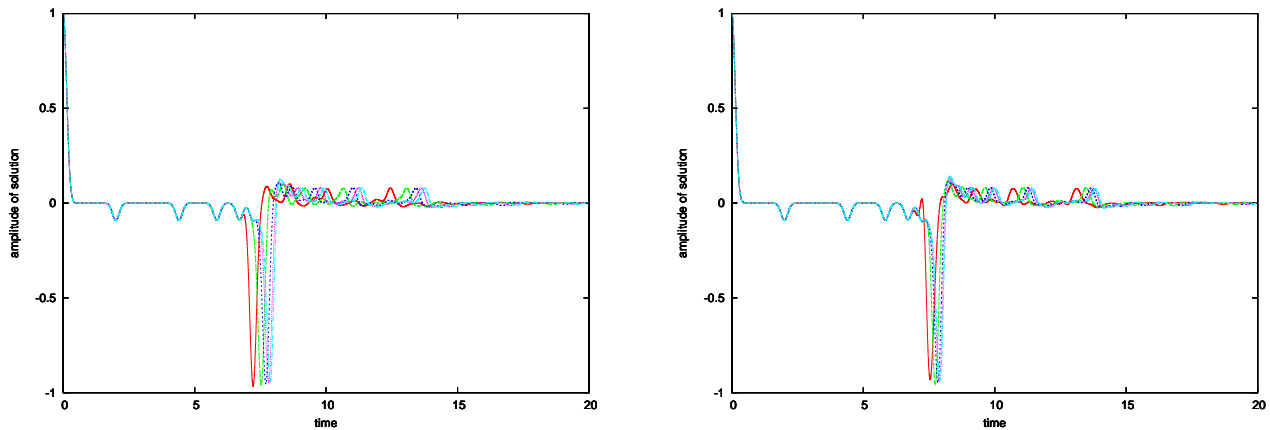


FIGURE 7.1 – Tracé des instantanés par rapport au temps pour la condition de Dirichlet d'ordre 0 (gauche) et d'ordre 2 (droite) pour différentes valeurs de n : $n = 5$ (rouge), $n = 6$ (vert), $n = 7$ (bleu), $n = 8$ (violet) et $n = 9$ (cyan).

$\mu_{\{0,1\}} = \alpha_{\{0,1\}} = 0.6$. Nous pouvons voir quand $n \rightarrow \infty$, la solution $u^n(t, \mathbf{x})$ converge vers une fonction $u(t, \mathbf{x})$.

7.2.2 Résultats quantitatifs pour le modèle temporel

Pour tester la validité de la convergence, nous prenons le jeu de paramètres $p = 2$ et $\mu_{\{0,1\}} = \alpha_{\{0,1\}} = 0.5$, pour lequel nous savons faire le calcul explicite de la solution du problème posé sur l'arbre entier, que ce soit dans le cas du problème de Dirichlet ou dans le cas du problème de Neumann. Nous regardons ce qui se passe dans le cas du problème sur l'arbre tronqué avec condition de Neumann à la troncature et avec condition DtN à la troncature, et nous comparons à la solution

Nous pouvons constater sur la figure 7.1 que l'erreur entre la solution exacte et la solution du problème tronquée est une puissance de la longueur restante. Nous constatons que numériquement l'équation régissant la courbe bleue est $E = C\alpha^{-1.2349n}$, et que l'équation régissant la courbe noire est $E = C\alpha^{-3.1848n}$. Nous retrouvons alors aux erreurs numériques près les ordres de convergences auxquels nous pouvions nous attendre :

- la condition de Neumann qui est une condition d'ordre 0 nous donne une erreur d'ordre 1
- la condition DtN que nous avons construite qui est une condition d'ordre 2 nous donne une erreur d'ordre 3.

7.2.3 Test de l'instabilité pour le problème de Neumann

Nous avons vu dans la proposition 7.1.2 que si l'un des coefficients λ_0 ou λ_2 n'avait pas le bon signe, la solution possédait généralement une partie exponentiellement croissante en temps. Afin de constater numériquement ce phénomène, nous regardons ce que donne le problème (7.1.2), avec en chaque point $[M]_{p,j}^n$ les valeurs de $\lambda_0([M]_{p,j}^n)$ et $\lambda_2([M]_{p,j}^n)$ qui correspondent au problème de Neumann :

$$\begin{aligned} \lambda_0([M]_{p,j}^n) &= 0 \\ \lambda_2([M]_{p,j}^n) &\sim \frac{1}{p-1 - \sum_{i=0} \mu_i \alpha_i} \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

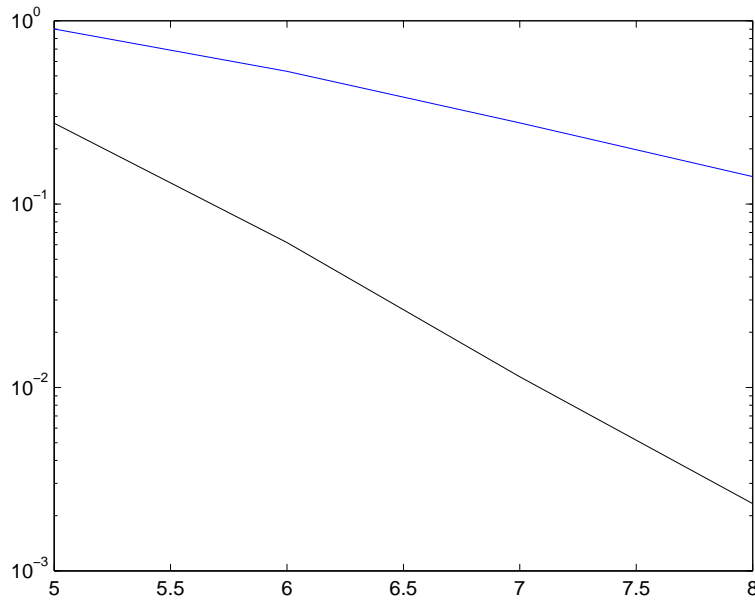


FIGURE 7.2 – Erreurs relatives obtenues pour le problème tronqué avec condition de Neumann à l’infini (courbe bleue) et opérateur DtN à l’infini (courbe noire)

et nous choisissons un jeu de paramètres (p, μ, α) tel que $\lambda_2 < 0$ (pour nos expériences numériques, nous avons pris $p = 2$ et $\mu_{\{0,1\}} = \alpha_{\{0,1\}} = 0.8$). Nous obtenons alors les instantanés $u(t, \mathbf{x})$ en fonction de t , pour \mathbf{x} se situant au milieu du segment $\widehat{\Sigma}$, pour une donnée de Cauchy étant égale à une donnée de Gaussienne à support compact dans $\widehat{\Sigma}$, centrée en \mathbf{x} et se déplaçant vers les générations suivantes de l’arbre, pour différentes valeurs de n , et en gardant le même temps de calcul final que précédemment.

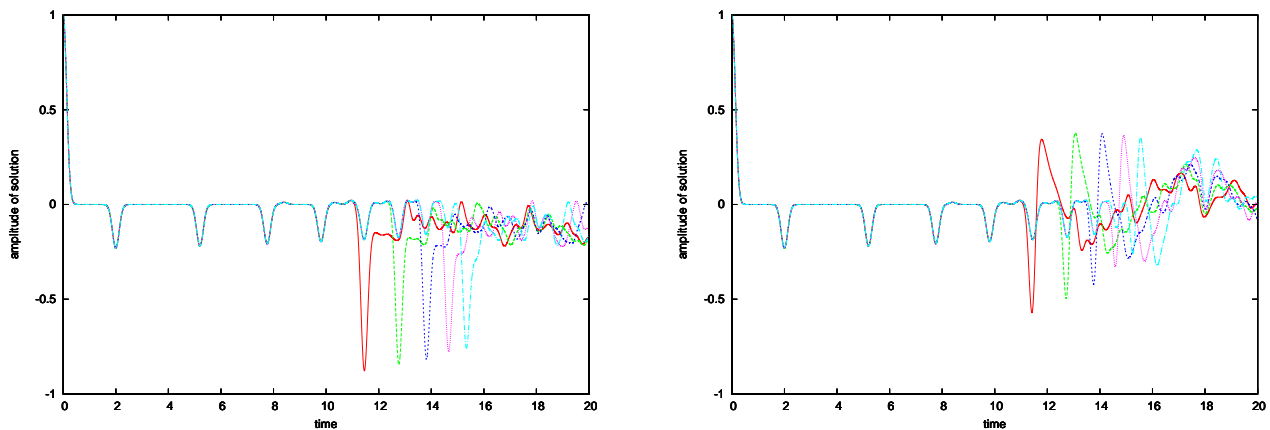


FIGURE 7.3 – Tracé des instantanés par rapport au temps pour la condition de Neumann d’ordre 2 (gauche) et pour la condition de Dirichlet d’ordre 2 (droite) cas le cas “instationnaire” pour différentes valeurs de n : $n = 5$ (rouge), $n = 6$ (vert), $n = 7$ (bleu), $n = 8$ (violet) et $n = 9$ (cyan).

Aussi bien sur le problème de Neumann que sur le problème de Dirichlet, lorsque nous regardons la figure 7.3, contrairement à ce qui pouvait se passer sur la figure 7.1, nous n’avons plus stabilité du signal en temps long. Nous avons donc poussé plus loin le temps de calcul pour obtenir la figure 7.4.

Nous pouvons alors constater l'explosion de la solution pour le problème de Neumann, alors que nous avons toujours une convergence de la solution pour le problème de Dirichlet.

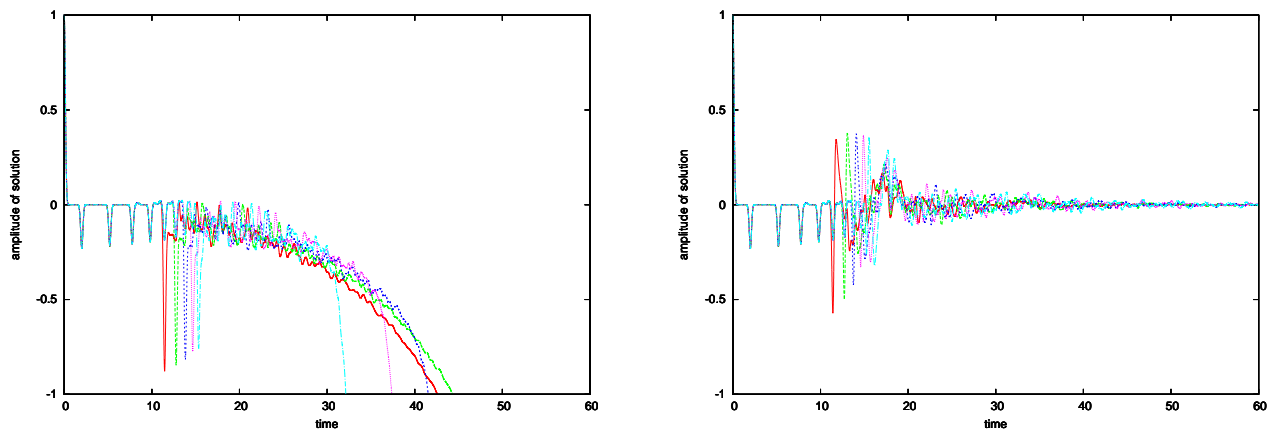


FIGURE 7.4 – Tracé des instantanés par rapport au temps pour la condition de Neumann d'ordre 2 (gauche) et pour la condition de Dirichlet d'ordre 2 (droite) cas le cas "instationnaire" pour différentes valeurs de n : $n = 5$ (rouge), $n = 6$ (vert), $n = 7$ (blue), $n = 8$ (violet) et $n = 9$ (cyan).

Troisième partie

Conclusion générale et références

Conclusion générale

8.1 Principaux résultats obtenus

Nous avons vu dans le chapitre 2 et dans le chapitre 3 qu'il est possible de ramener la résolution d'un problème d'équation d'onde sur un domaine $2D$ composé d'une jonction d'un nombre fini de fentes minces à la résolution d'un problème d'équation d'ondes sur un graphe. Nous avons vu que le problème que nous définissons sur le graphe, avec des conditions pouvant être vu comme une perturbation des lois de Kirchhoff aux nœuds du graphe, est bien posé, et peut être approché par un schéma numérique dont la condition de stabilité ne dépend pas du paramètre de perturbation. Cette partie a donné lieu au code numérique NETWAVES, co-écrit avec K. Boxberger. La seule partie qui n'a pas été implémentée au sein de ce code est la résolution des problèmes de Laplace avec opérateur DtN qui donnent les coefficients des perturbations que nous mettons sur les nœuds du graphe. À la place, nous avons utilisé différents outils de calculs (MATLAB et FREEFEM++) pour obtenir ces coefficients.

Nous avons également vu dans le chapitre 5, que nous pouvons définir un cadre fonctionnel pour résoudre un problème de Laplace dans un réseau fractal. Nous avons également vu que nous pouvons définir des opérateurs de trace sur ce type de géométrie et donner des propriétés sur ces opérateurs de trace. Enfin, nous avons vu dans le chapitre 6 qu'il était possible d'étendre les techniques du chapitre 5 au problème de Helmholtz, voire au problème d'onde acoustique en domaine temporel. Nous savons donner des conditions suffisantes d'existence de la solution du problème de Helmholtz pour quasiment toute fréquence dans \mathbb{C} . Nous savons aussi montrer partiellement que ces conditions sont également des conditions nécessaires. Enfin, dans le chapitre 7, nous avons corroboré les résultats avec des simulations numériques qui ont également été faites avec le code NETWAVES.

Les différents résultats présentés ont donné lieu aux publications suivantes :

- *Construction and analysis of improved Kirchhoff conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots*, avec P. Joly, paru dans ESAIM Proceedings [JS08] (référence correspondant aux travaux du chapitre 2)
- *Study of propagation of acoustic waves in junction of thin slots*, avec P. Joly, Rapport de Recherche INRIA [JS10] (référence correspondant aux travaux du chapitre 3)
- *Numerical resolution of the wave equation on a network of slots*, Rapport Technique INRIA [Sem09] (référence correspondant aux travaux du chapitre 4, en particulier des sections 4.3 et 4.4)
- *Propagation of acoustic waves in fractal networks*, avec P. Joly, accepté pour publication dans Oberwolfach Reports (<http://www.ems-ph.org/journals/journal.php?jrn=owr>) - redonne les résultats des sections 5.2.2 et 5.3 dans le cadre de la géométrie du chapitre 6.

8.2 Perspectives de recherche

8.2.1 Jonction de fentes minces

Il est possible d'étendre les résultats des chapitres 2 et 3 au cas de la résolution du problème d'acoustique (aussi bien en harmonique qu'en temporel) dans le cas d'une jonction de fentes 3D (auquel

cas, deux dimensions sont de l'ordre de ε petit). Le principal point qui change pour l'écriture des développements modaux des fonctions de champ proche U^k est que nous n'utilisons plus des fonctions propres de Laplacien 1D, mais des fonctions propres de Laplacien 2D. Bien que nous n'ayons pas encore soumis de papier sur ce point (le papier associé est en cours de préparation), nous avons déjà implémenté la résolution des problèmes de Laplace 3D avec opérateurs non-locaux DtN 2D sous FREEFEM++, et nous avons tracé sur la figure 8.1 le calcul de la fonction \mathcal{W}_1 pour une jonction de deux fentes carrées centrées sur les axes $y = z = 0$ et $x = z = 0$ sur laquelle nous connaissons analytiquement les fonctions propres du Laplacien 2D associées à chacune des faces. La visualisation de la solution utilise le logiciel MEDIT [Fre01].

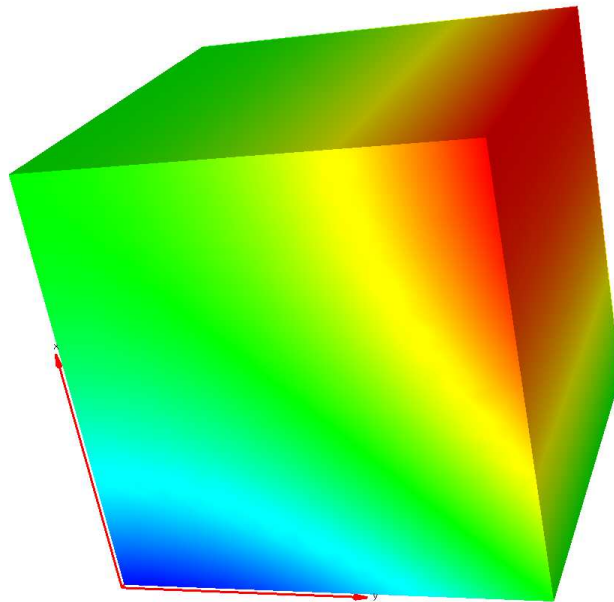


FIGURE 8.1 – Calcul de la fonction \mathcal{W}_1 pour une jonction de deux fentes carrées identiques

Le cas de la résolution de l'équation de l'électromagnétisme (aussi bien dans le cadre harmonique - équation de Maxwell - que dans le cadre temporel) est *a priori* beaucoup plus délicat, aussi bien d'un point de vue théorique que d'un point de vue numérique.

8.2.2 Réseaux infinis

Dans le cas d'un réseau p -adique auto-similaire, plusieurs questions restent ouvertes.

- Nous savons démontrer que, du moment que les fonctions à support compact ne sont pas denses dans l'espace $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$, la trace sur le "bord" infini de la fermeture des fonctions à support compact est nulle. Toutefois, nous ne savons pas démontrer la réciproque, à savoir que si la trace d'une fonction sur le bord infini est nulle, alors cette fonction est à support compact.

- Nous savons donner des inclusions de l'espace d'arrivée, mais la question réciproque peut se poser : dans quel espace doit-on prendre Φ pour être sûr de trouver $u \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{T})$? *A priori*, si nous nous référons aux travaux de B. Maury, D. Salort et C. Vannier [MSV09], ce n'est pas dans un espace H^s que nous devons chercher cet espace d'arrivée, mais dans un espace \mathbb{A}^s . Dans le cas d'un réseau diadique symétrique, nous pouvons introduire la base de Haar. Dans le cas d'un réseau p -adique non symétrique, il faut introduire une version plus générale de cette base de Haar - les travaux de Y. Meyer sont une première voie d'étude [Mey90, MC97].
- Nous avons développé la fonction $\lambda(\omega)$ en utilisant des développements de Taylor. Toutefois ceux-ci ne reflètent pas le comportement de la fonction vis-à-vis des pôles. Un de nos prochains points sera d'utiliser des développements de Paddé pour mieux prendre en compte ce comportement.
- Nous avons des résultats numériques sur la résolution du problème d'ondes en temporel sur un réseau p -adique auto-similaire donnés dans le chapitre 7, mais un certain nombre de résultats théoriques restent à démontrer.

8.2.3 Combinaison des deux phénomènes

Une des perspectives d'étude de ce travail de thèse est d'étudier ce qui se passe pour la résolution du problème de Helmholtz dans le cas d'un réseau p -adique auto-similaire si, au lieu de considérer des fonctions continues sur le réseau entier et la loi de Kirchhoff en chaque nœud intérieur du réseau, nous considérons à la place des fonctions continues sur chaque arête du réseau et la loi de Kirchhoff améliorée telle qu'elle a été détaillée dans le chapitre 3 de cette thèse. En particulier, nous pouvons nous poser la question de l'impact des matrices \mathcal{J} et \mathcal{A} reflétant le comportement de la géométrie au niveau de chaque nœud intérieur sur l'opérateur DtN que nous voulons écrire pour restreindre le problème sur un nombre fini de générations.

Quelques propriétés sur les opérateurs DtN non-locaux

Dans ce chapitre, nous donnons des propriétés générales sur les opérateurs DtN rencontrés dans les chapitres 2 (section A.1) et 3 (section A.2).

A.1 Cas particulier d'une jonction de deux fentes

En utilisant l'analyse de Fourier, nous savons que toute fonction $v \in L^2(]-1, 0[)$ peut se décomposer sous la forme d'une somme de cosinus et de sinus de pulsation $p\pi$, avec $p \in \mathbb{N}$. Nous nous intéressons ici à l'espace $L^2_{\cos}(]-1, 0[)$ des fonctions dont la décomposition ne fait intervenir que des cosinus, i.e.

$$L^2_{\cos}(]-1, 0[) = \left\{ v \in L^2(]-1, 0[), \quad \forall p \geq 1, \quad \int_{-1}^0 v(y) \sin(p\pi y) dy = 0 \right\} \quad (\text{A.1.1})$$

De la même manière, pour $s > 0$, nous définissons l'espace $H^s_{\cos}(]-1, 0[)$ par

$$H^s_{\cos}(]-1, 0[) = \left\{ v \in H^s(]-1, 0[), \quad \forall p \geq 1, \quad \int_{-1}^0 v(y) \sin(p\pi y) dy = 0 \right\} \quad (\text{A.1.2})$$

Notons que pour $s \leq s'$, $H^{s'}_{\cos}(]-1, 0[) \subset H^s_{\cos}(]-1, 0[)$, de la même manière que $H^{s'}(]-1, 0[) \subset H^s(]-1, 0[)$. Nous rappelons ici la base orthnormale de fonctions de $L^2_{\cos}(]-1, 0[)$

$$w_0(y) = 1, \quad w_p(y) = \sqrt{2} \cos(p\pi y), \quad p \geq 1 \quad (\text{A.1.3})$$

Avec cette base de fonctions, une norme naturelle sur l'espace des fonctions $H^s_{\cos}(]-1, 0[)$ est la norme induite par les coefficients de la série de Fourier, i.e.

$$\|v\|_{H^s_{\cos}(]-1, 0[)}^2 = \sum_{p \in \mathbb{N}} (1 + p^2)^s |(v, w_p)_0|^2 \quad (\text{A.1.4})$$

où

$$(v, w_p)_0 = \int_{-1}^0 v(y) w_p(y) dy \quad (\text{A.1.5})$$

Nous définissons alors l'opérateur DtN T de la manière suivante

Définition A.1.1. Pour toute fonction $v \in H^s_{\cos}(]-1, 0[)$, nous définissons Tv par

$$Tv = \sum_{p \in \mathbb{N}} p\pi (v, w_p)_0 w_p \quad (\text{A.1.6})$$

Remarque A.1.2. Dans la définition A.1.1, si nous choisissons $v = 1$, alors $Tv = 0$. Le noyau de T contient donc toutes les fonctions constantes.

Sur cet opérateur, nous avons quatre propriétés à démontrer : une propriété de continuité, une propriété de positivité, une propriété de symétrie, et une inégalité de Cauchy-Schwartz.

Proposition A.1.3 (Continuité de l'opérateur T). *Pour tout $s \geq 0$, $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{\cos}^s(\cdot - 1, 0], \mathbf{H}^{s-1}(\cdot - 1, 0])$. De plus, pour tout $s \geq 1$, $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{\cos}^s(\cdot - 1, 0], \mathbf{H}_{\cos}^{s-1}(\cdot - 1, 0])$*

Démonstration. Nous traitons différemment le cas $s \geq 1$ du cas $s < 1$.

- Cas $s \geq 1$: soit $v \in \mathbf{H}_{\cos}^s(\cdot - 1, 0]$, et montrons que

$$\|Tv\|_{\mathbf{H}_{\cos}^{s-1}(\cdot - 1, 0]} \leq \pi \|v\|_{\mathbf{H}_{\cos}^s(\cdot - 1, 0]}$$

Nous partons de

$$\begin{aligned} \|Tv\|_{\mathbf{H}_{\cos}^{s-1}(\cdot - 1, 0]}^2 &= \sum_{p \in \mathbb{N}} (1 + p^2)^{s-1} |(Tv, w_p)_0|^2 \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}} (1 + p^2)^{s-1} \left| \sum_{q \in \mathbb{N}} q \pi(v, w_q)_0 (w_p, w_q)_0 \right|^2 \end{aligned}$$

Puisque $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $L_{\cos}^2(\cdot - 1, 0]$, nous obtenons

$$\|Tv\|_{\mathbf{H}_{\cos}^{s-1}(\cdot - 1, 0]}^2 = \sum_{p \in \mathbb{N}} \pi^2 (1 + p^2)^{s-1} p^2 |(Tv, w_p)_0|^2$$

et nous majorons p^2 par $1 + p^2$ pour obtenir le résultat souhaité.

- Cas $s < 1$: soit $v \in \mathbf{H}_{\cos}^s(\cdot - 1, 0]$ et montrons que, pour toute fonction $\psi \in \mathbf{H}_{\cos}^{1-s}(\cdot - 1, 0]$,

$$\left| \int_{-1}^0 \psi(y) Tv(y) dy \right| \leq \pi \|v\|_{\mathbf{H}_{\cos}^s(\cdot - 1, 0]} \|\psi\|_{\mathbf{H}_{\cos}^{1-s}(\cdot - 1, 0]}$$

Pour cela, nous partons de

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^0 \psi(y) Tv(y) dy \right| &= \left| \sum_{p \in \mathbb{N}} p \pi(v, w_p)_0 (\psi, w_p)_0 \right| \\ &\leq \pi \sum_{p \in \mathbb{N}} \sqrt{1 + p^2} |(v, w_p)_0| |(\psi, w_p)_0| \\ &\leq \pi \sum_{p \in \mathbb{N}} (1 + p^2)^{\frac{s}{2}} |(v, w_p)_0| (1 + p^2)^{\frac{1-s}{2}} |(\psi, w_p)_0| \end{aligned}$$

Nous utilisons alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la définition des normes $\mathbf{H}_{\cos}^s(\cdot - 1, 0]$ et $\mathbf{H}_{\cos}^{1-s}(\cdot - 1, 0]$ pour conclure. \square

Proposition A.1.4 (Positivité de l'opérateur T). *Pour toute fonction $v \in \mathbf{H}_{\cos}^{\frac{1}{2}}(\cdot - 1, 0]$, nous avons*

$$\int_{-1}^0 \bar{v}(y) Tv(y) dy \geq 0$$

Démonstration. Soit $v \in \mathbf{H}_{\cos}^{\frac{1}{2}}(] - 1, 0[)$. En utilisant la proposition A.1.3 pour $s = \frac{1}{2}$, nous savons que la quantité $\int_{-1}^0 \bar{v}(y)Tv(y)dy$ est finie. Nous avons de plus

$$\int_{-1}^0 \bar{v}(y)Tv(y)dy = \sum_{p \in \mathbb{N}} p\pi(\bar{v}, w_p)_0(v, w_p)_0 = \sum_{p \in \mathbb{N}} p\pi(\overline{v, w_p})_0(v, w_p)_0$$

Cette quantité est donc écrite comme étant égale à une somme de termes positifs, donc est elle-même positive. \square

Proposition A.1.5 (Symétrie de l'opérateur T). *T est un opérateur symétrique au sens de la moyenne.*

Démonstration. Soient $(v, \psi) \in \mathbf{H}_{\cos}^{\frac{1}{2}}(] - 1, 0[)$. Montrons

$$\int_{-1}^0 v(y)T\psi(y)dy = \int_{-1}^0 \psi(y)Tv(y)dy$$

Nous pouvons remarquer, par définition de T que

$$\int_{-1}^0 v(y)T\psi(y)dy = \int_{-1}^0 v(y) \sum_{p \geq 1} p\pi(\psi, w_p)_0 w_p(y)dy$$

En utilisant les arguments de continuité démontrés dans la proposition A.1.3, nous pouvons inverser intégrale suivant y et somme suivant p , et nous obtenons

$$\int_{-1}^0 v(y)T\psi(y)dy = \sum_{p \geq 1} \int_{-1}^0 v(y)p\pi(\psi, w_p)_0 w_p(y)dy$$

En faisant sortir le terme indépendant de y devant l'intégrale, et en utilisant (A.1.5), nous obtenons

$$\int_{-1}^0 v(y)T\psi(y)dy = \sum_{p \geq 1} p\pi(\psi, w_p)_0(v, w_p)_0$$

De la même manière, nous obtenons

$$\int_{-1}^0 \psi(y)Tv(y)dy = \sum_{p \geq 1} p\pi(\psi, w_p)_0(v, w_p)_0$$

En faisant la différence entre les deux dernières relations, nous avons le résultat escompté. \square

Proposition A.1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwartz). *Pour toutes fonctions $(v, \psi) \in \mathbf{H}_{\cos}^{\frac{1}{2}}(] - 1, 0[)$, nous avons*

$$\left| \int_{-1}^0 v(y)T\psi(y)dy \right|^2 \leq \int_{-1}^0 \bar{v}(y)Tv(y)dy \int_{-1}^0 \bar{\psi}(y)T\psi(y)dy$$

Démonstration. Nous partons de la dernière relation de la proposition A.1.5, et nous obtenons

$$\left| \int_{-1}^0 v(y)T\psi(y)dy \right|^2 = \left| \sum_{p \geq 1} p\pi(\psi, w_p)_0(v, w_p)_0 \right|^2$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur le membre de droite de cette relation et nous obtenons

$$\left| \int_{-1}^0 v(y)T\psi(y)dy \right|^2 \leq \pi^2 \sum_{p \geq 1} p |(v, w_p)_0|^2 \sum_{p \geq 1} p |(\psi, w_p)_0|^2$$

Nous utilisons la relation de la démonstration de la proposition A.1.4 pour conclure. \square

A.2 Cas général

Ici, nous identifions Σ au segment $\left] -\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} \right[$, où β est paramètre fixé dans cette section. Nous nous intéressons à l'espace

$$H_{\cos}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) = \left\{ v \in H^s\left(\left] -1, 0 \right[\right), \quad \forall p \geq 1, \quad \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} v(y) \sin\left(p\pi\left(\frac{y}{\beta} - \frac{1}{2}\right)\right) dy = 0 \right\} \quad (\text{A.2.1})$$

Cet espace admet comme base de fonctions

$$w_{\beta,0} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad w_{\beta,p} = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \cos\left(p\pi\left(\frac{y}{\beta} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (\text{A.2.2})$$

Avec cette base de fonctions, une norme naturelle sur l'espace des fonctions $H_{\cos}^s\left(\left] -1, 0 \right[\right)$ est la norme induite par les coefficients de la série de Fourier, i.e.

$$\|v\|_{H_{\cos}^s(\Sigma)}^2 = \sum_{p \in \mathbb{N}} (1+p^2)^s |(v, w_{\beta,p})_0|^2 \quad (\text{A.2.3})$$

où

$$|(v, w_{\beta,p})_0| = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} v(y) w_{\beta,p}(y) dy \quad (\text{A.2.4})$$

Nous définissons alors l'opérateur DtN T_β de la manière suivante

Définition A.2.1. Pour toute fonction $v \in H_{\cos}^s(\Sigma)$, nous définissons $T_\beta v$ par

$$T_\beta v = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{p\pi}{\beta} (v, w_{\beta,p})_0 w_{\beta,p} \quad (\text{A.2.5})$$

Nous avons alors les mêmes propriétés que pour l'opérateur T de la section A.1.

Bibliographie

- [AMN93] Felix Ali Mehmeti and Serge Nicaise. Nonlinear interaction problems. *Nonlinear Anal.*, 20(1) :27–61, 1993.
- [AST06] Yves Achdou, Christophe Sabot, and Nicoletta Tchou. Diffusion and propagation problems in some ramified domains with a fractal boundary. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(4) :623–652, 2006.
- [AST07] Yves Achdou, Christophe Sabot, and Nicoletta Tchou. Transparent boundary conditions for the Helmholtz equation in some ramified domains with a fractal boundary. *J. Comput. Phys.*, 220(2) :712–739, 2007.
- [AT] François Alouges and Marc Tajchman. EF3 ToolBox - Software Toolbox written in Matlab / C++. <http://ww.cmap.polytechnique.fr/~alouges/logiciels.php>.
- [AT07] Yves Achdou and Nicoletta Tchou. Neumann conditions on fractal boundaries. *Asymptot. Anal.*, 53(1-2) :61–82, 2007.
- [Bih56] I. Bihari. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 7 :81–94, 1956.
- [Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [BSU08] Anna Blasiak, Robert S. Strichartz, and Baris Evren Ugurcan. Spectra of self-similar Laplacians on the Sierpinski gasket with twists. *Fractals*, 16(1) :43–68, 2008.
- [Cia02] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Reprint of the 1978 original [North-Holland, Amsterdam ; MR0520174 (58 #25001)].
- [CJT94] Gary Cohen, Patrick Joly, and Nathalie Tordjman. Éléments finis d’ordre élevé avec condensation de masse pour l’équation des ondes en dimension 1. Research Report RR-2323, INRIA, 1994. Projet IDENT.
- [Cla08] Xavier Claeys. *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d’ondes par des fils minces*. PhD thesis, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2008.
- [Coh02] Gary C. Cohen. *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Scientific Computation. Springer-Verlag, Berlin, 2002. With a foreword by R. Glowinski.
- [Dau88] Monique Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains*, volume 1341 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Smoothness and asymptotics of solutions.
- [Dav04] Timothy A. Davis. Algorithm 832 : UMFPACK V4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans. Math. Software*, 30(2) :196–199, 2004.
- [DN98] Bertrand Dekoninck and Serge Nicaise. Spectre des réseaux de poutres. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 326(10) :1249 – 1254, 1998.
- [DTV06] Monique Dauge, Sébastien Tordeux, and Grégory Vial. Matching and multiscale expansions for a model singular perturbation problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(10) :637–642, 2006.

- [Edg90] Gerald A. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Fre01] Pascal J. Frey. MEDIT : An interactive Mesh visualization Software. 0 RT-0253, INRIA, 12 2001.
- [Hut81] John E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5) :713–747, 1981.
- [Il'92] A. M. Il'in. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, volume 102 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. Translated from the Russian by V. Minachin [V. V. Minakhin].
- [Joe86] Barry Joe. Delaunay triangular meshes in convex polygons. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7(2) :514–539, 1986.
- [JS08] Patrick Joly and Adrien Semin. Construction and analysis of improved Kirchoff conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots. *ESAIM Proceeding*, 25 :44–67, 12 2008.
- [JS10] Patrick Joly and Adrien Semin. Study of propagation of acoustic waves in junction of thin slots. Technical report, INRIA Research Report, 4 2010.
- [JT06] Patrick Joly and Sébastien Tordeux. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots. I. The asymptotic expansion. *Multiscale Model. Simul.*, 5(1) :304–336 (electronic), 2006.
- [KG89] Joseph B. Keller and Dan Givoli. Exact nonreflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 82(1) :172–192, 1989.
- [Kon67] V. A. Kondrat'ev. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 16 :209–292, 1967.
- [Kuc02] Peter Kuchment. Graph models for waves in thin structures. *Waves Random Media*, 12(4) :R1–R24, 2002.
- [Lan99] Serge Lang. *Complex analysis*, volume 103 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1999.
- [MC97] Yves Meyer and Ronald Coifman. *Wavelets*, volume 48 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Calderón-Zygmund and multilinear operators, Translated from the 1990 and 1991 French originals by David Salinger.
- [Mey90] Yves Meyer. Construction de bases orthonormées d'ondelettes. *Colloq. Math.*, 60/61(1) :141–149, 1990.
- [MMZ07] Jean-Marie Morvan, Rémi Morvan, and Georges Zafindratafa. *Bien débiter en mathématiques. Espaces vectoriels, matrices. Exercices corrigés avec rappel de cours*. Bien débiter en mathématiques. CepaduÃ's éditions Toulouse, 2007.
- [MNP91a] W. G. Mazja, S. A. Nasarow, and B. A. Plamenewski. *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. I*, volume 82 of *Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung : Mathematische Monographien [Mathematical Textbooks and Monographs, Part II : Mathematical Monographs]*. Akademie-Verlag, Berlin, 1991. Störungen isolierter Randsingularitäten. [Perturbations of isolated boundary singularities].
- [MNP91b] W. G. Mazja, S. A. Nasarow, and B. A. Plamenewski. *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. II*, volume 83 of *Mathematische*

- Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung : Mathematische Monographien [Mathematical Textbooks and Monographs, Part II : Mathematical Monographs]*. Akademie-Verlag, Berlin, 1991. Nichtlokale Störungen. [Nonlocal perturbations].
- [MSV09] Bertrand Maury, Delphine Salort, and Christine Vannier. Trace theorems for trees, application to the human lungs. *Network and Heterogeneous Media*, 4(3) :469 – 500, September 2009.
- [Ram01] A. G. Ramm. A simple proof of the Fredholm alternative and a characterization of the Fredholm operators. *Amer. Math. Monthly*, 108(9) :855–860, 2001.
- [Rot84] Jean-Pierre Roth. Le spectre du laplacien sur un graphe. In *Théorie du potentiel (Orsay, 1983)*, volume 1096 of *Lecture Notes in Math.*, pages 521–539. Springer, Berlin, 1984.
- [RS01a] Jacob Rubinstein and Michelle Schatzman. Variational problems on multiply connected thin strips. I. Basic estimates and convergence of the Laplacian spectrum. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 160(4) :271–308, 2001.
- [RS01b] Jacob Rubinstein and Michelle Schatzman. Variational problems on multiply connected thin strips. II. Convergence of the Ginzburg-Landau functional. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 160(4) :309–324, 2001.
- [Sem09] Adrien Semin. Numerical resolution of the wave equation on a network of slots. Technical Report RT-369, INRIA, 2009.
- [She96] Jonathan Richard Shewchuk. *Applied Computational Geometry Towards Geometric Engineering*, volume 1184, chapter Triangle : Engineering a 2D quality mesh generator and Delaunay triangulator, pages 203–222. Springer Verlag, 1996.
- [SW04] Robert S. Strichartz and Carto Wong. The p -Laplacian on the Sierpinski gasket. *Nonlinearity*, 17(2) :595–616, 2004.
- [Tor04] Sébastien Tordeux. *Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux comportant des Fentes*. PhD thesis, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2004.
- [VD75] Milton Van Dyke. *Perturbation methods in fluid mechanics*. The Parabolic Press, Stanford, Calif., annotated edition, 1975.
- [Via03] Grégory Vial. *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine \tilde{A} coin*. PhD thesis, Université de Rennes I, 2003.
- [Wei63] Ewald R. Weibel. Morphometry of the human lung. *Springer Verlag and Academic Press*, 1963.

Résumé : Cette thèse traite de la modélisation de la propagation d'ondes dans des jonctions de fentes minces, *i.e.* dont l'épaisseur est plus petite que la longueur caractéristique des ondes que l'on considère; et dans des réseaux fractals. Concernant le traitement des jonctions de fentes minces, en utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés, nous dérivons un développement de la solution de l'équation des ondes, aussi bien dans le cas harmonique que dans le cas temporel, à partir duquel nous pouvons construire un problème existant sur une géométrie limite ne dépendant plus de l'épaisseur des fentes, mais qui fait intervenir la résolution de problèmes de Laplace posés sur des géométries canoniques et faisant intervenir des opérateurs Dirichlet-to-Neumann non-locaux. Nous montrons le caractère bien posé du problème que nous construisons. Nous donnons également une méthode numérique performante pour résoudre ce problème. Concernant le traitement des réseaux fractals, nous introduisons des espaces de Sobolev afin de pouvoir définir l'équation des ondes sur ce type de géométrie. Nous montrons une condition nécessaire et suffisante pour définir une trace à l'infini du réseau fractal. Nous montrons que nous pouvons ramener la résolution à un réseau fini *modulo* la construction d'opérateurs Dirichlet-to-Neumann. Nous montrons le caractère bien posé de ce problème.

Mots clés : développements asymptotiques raccordés, loi de Kirchhoff, réseaux, fractales, Helmholtz, modélisation, estimation d'erreur, calcul parallèle.

Propagation of waves in junction of thin slots

Abstract : This thesis deals with modelisation of wave propagation in junctions of thin slots, *i.e.* whose width is smaller than the characteristic wavelength we consider; and in fractal networks. Concerning treatment of junctions of thin slots, using method of matched asymptotics, we derive a development of the solution of the wave equation, both in time-harmonic and time-domain case, from which we can build a problem on a limit geometry that does not depend on the width of the slots. This problem uses solutions of some Laplacian equation posed on canonical domains with non-local Dirichlet-to-Neumann operators. We prove the well-posedness of the problems. We also give a performant numerical method to solve this problem. Concerning treatment of fractal networks, we introduce Sobolev spaces to be able to define wave equation on this kind of geometry. We exhibit some necessary and sufficient condition to be able to define some trace operator at infinity of this domain. We prove that we can solve on a finite domain *modulo* building of Dirichlet-to-Neumann operators. We prove well-posedness of this problem.

Keywords : matched asymptotic expansions, Kirchhoff laws, networks, fractals, Helmholtz, modelisation, error estimate, parallel computing.
