Γραμμικός και Μή Προγραμματισμός
Άσκηση 7

4 Ιουνίου 2004

Ασκήσεις Θεωρίας

- Άν έχουμε μιά μέθοδο πού εντοπίζει τίς βέλτιστες λύσεις τού προβλήματος:

$$\begin{aligned} &max\ f(x) \\ &x \in F \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

  τότε:

  - α) Πώς θα επιλύσουμε ένα πρόβλημα τής μορφής:

  $$\begin{aligned} &max\ (a + b \cdot f(x)) \\ &x \in F \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

    όπου $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}_+$ σταθερές, ή τής μορφής (άν f θετική συνάρτηση):

  $$\begin{aligned} &max(f(x)^a) \\ &x \in F \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

    όπου $a \in \mathbb{R}_+$ σταθερά ;
    (Υπόδειξη: Δείξτε ότι όλα αυτά τα προβλήματα έχουν το ίδιο σύνολο βέλτιστων λύσεων $\{x^*\}$ με τού αρχικού προβλήματος.)

  - β) Πώς θα επιλύσουμε το γενικώτερο Πρόβλημα Τετραγωνικού Προγραμματισμού:

  $$\begin{aligned} max(a + c^T \cdot x + x^T \cdot D \cdot x) \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

    όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά;

- Αν $f_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, .., n$ είναι κυρτές συναρτήσεις και $a_1, a_2, .., a_n \in \mathbb{R}_+$, δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$F(x) := max_{1 \leq i \leq n}\ \{f_i(x)\}, \quad f(x) := \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

  είναι επίσης κυρτές.

- Δείξτε ότι στο πρόβλημα:

$$\begin{aligned} &min(||x_1 - x|| + ||x_2 - x||) \\ &x \in F = \{z \in \mathbb{R}^n : h(z) = 0\} \end{aligned}$$

  όπου $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και x_1, x_2 σταθερά σημεία τού $\mathbb{R}^n$, τα κρίσιμα σημεία x^* ικανοποιούν τήν εξίσωση:

$$\frac{(x_1 - x^*)^T \cdot \nabla h(x^*)}{||x_1 - x^*|| \cdot ||\nabla h(x^*)||} = \frac{(x_2 - x^*)^T \cdot \nabla h(x^*)}{||x_2 - x^*|| \cdot ||\nabla h(x^*)||}$$

  ($||\cdot||$ είναι η Ευκλείδια νόρμα τού $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $||x|| = (x^T \cdot x)^{\frac{1}{2}}$).

- Εφαρμόζοντας τήν ανάλυση πού έγινε για προβλήματα κυρτού προγραμματισμού, δείξτε ότι στο γενικό Π.Γ.Π.:

$$\begin{aligned} &max(c^T \cdot x) \\ &Ax \le b \\ &x \ge 0 \end{aligned}$$

  τα $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ πού αντιστοιχούν στό Πόρισμα 3 είναι οι βέλτιστες λύσεις αυτού τού προβλήματος και τού δυϊκού του αντίστοιχα.

Υπολογιστικές Ασκήσεις

Να λυθούν τα παρακάτω Π.Μ.Γ.Π., μορφώνοντας κατάλληλες συνθήκες Kuhn-Tucker. (το γεγονός ότι κάποια από αυτά είναι προβλήματα κυρτού και ειδικώτερα τετραγωνικού προγραμματισμού, απλοποιεί την επιλυσιμότητά τους).
Ειδικώτερα τα Προβλήματα Τετραγωνικού Προγραμματισμού, να επιλυθούν με την αναλυτική μέθοδο αλλά και με την τροποποιημένη μέθοδο Simplex:

- $$\begin{aligned} &min \ \ (-3x_1 + x_2 - x_3^2) \\ &-x_1 + 2x_2 + x_3^2 = 0 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \le 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &min \ \ [3x_1^2 - ln((x_2+1)^3)] \\ &4x_1 + 2x_2 \le 6 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &max \ \ [ln(1+x_1) - \frac{1}{1+x_2}] \\ &x_1 + x_2 \le 1 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} max \quad & [ln(1+x_1)+x_1-x_2] \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1+x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} max \quad & (9-2x_1-2x_1^2+2x_1x_2-x_2^2-2x_3) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} max \quad & (x_1+2x_2) \\ 4x_1^2+4x_2^2 &\leq 4 \\ 4x_1+2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} max \quad & (16x_1+16x_2-x_1^2-4x_2^2) \\ x_1+2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} max \quad & (2x_1-2x_2-2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2) \\ x_1+x_2+x_3 &\leq 1 \\ 4x_1+2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} max \quad & (10x_1+10x_2-x_1^2-x_2^2) \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1+x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$