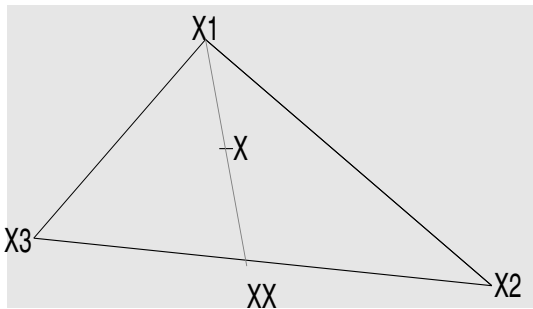


Γραμμικός και Μή Προγραμματισμός

Άσκηση 2

25 Μαρτίου 2004

- Αποδώστε τις παρακάτω έννοιες χρησιμοποιώντας μαθηματικό συμβολισμό:
 - 'τό x είναι **κυρτός συνδυασμός** των σημείων $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$ '
 - 'τό F είναι **κυρτό πολύεδρο** του \mathbb{R}^n '
 - 'τό x είναι **κορυφή** του κυρτού πολυέδρου F '
 - 'τό x είναι **μή-εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση** του Π.Γ.Π.'
- Δείξτε ότι αν 'τό H είναι **ημιεπίπεδο** του \mathbb{R}^n ' τότε 'τό H είναι **κυρτό σύνολο** του \mathbb{R}^n '
- 'Αν $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^n$ είναι δοσμένα μή συνευθειακά σημεία (δηλαδή τα $X_1 - X_2, X_1 - X_3$ είναι γ.α. διανύσματα) τότε
 - Το λιγότερο πόσα (και ποιά) Ημιεπίπεδα ή Υπερεπίπεδα του \mathbb{R}^n απαιτούνται για να οριστεί το κυρτό πολύεδρο $X_1 X_2 X_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{'τό } x \text{ είναι κυρτός συνδυασμός των σημείων } X_1, X_2, X_3\}$ ως τομή τους;
 - Πώς ονομάζεται απλούστερα το 'σύνολο των κυρτών συνδυασμών δύο σημείων του \mathbb{R}^n ';



(α') Τρίγωνο $X_1 X_2 X_3$

- Δείξτε ότι το τρίγωνο με κορυφές X_1, X_2, X_3 ταυτίζεται με το παραπάνω σύνολο. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο X του τριγώνου $X_1X_2X_3$ γράφεται ως κυρτός συνδυασμός μίας από τις κορυφές και ενός σημείου που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα των υπολοιπομένων δύο κορυφών (σχήμα), οπότε και να συμπεράνετε το ζητούμενο).
- Ολοκληρώνοντας τον αλγόριθμο *Simplex*, ποιά από τα στοιχεία του τελικού πίνακα *Simplex* θα έδειχναν ότι:
 - Η προκύπτουσα εφικτή λύση είναι μή-εκφυλισμένη κορυφή τής εφικτής περιοχής;
 - Η προκύπτουσα εφικτή λύση είναι εκφυλισμένη κορυφή τής εφικτής περιοχής;
 - Το Π.Γ.Π. είναι μή φραγμένο;
 - Το Π.Γ.Π. έχει δύο βέλτιστες λύσεις (και άρα άπειρες);
- Να λυθεί με τον αλγόριθμο Simplex, το Π.Γ.Π.

$$\begin{aligned}
 & \min(-3x_1 + x_2 - 2x_3) \\
 & -3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 9 \\
 & -5x_2 + x_3 \leq 1 \\
 & -4x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & -x_1 - x_2 - x_3 \leq 3 \\
 & x_1, x_2, x_3 \leq 0
 \end{aligned}$$

Αρχικά θα πρέπει να εισάγετε κατάλληλες τεχνητές μεταβλητές ώστε, στον πίνακα *Simplex* του μηδενικού βήματος να περιέχονται όλες οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_4 . Έπειτα επιλύστε το διαταραγμένο πρόβλημα που προκύπτει με την **μέθοδο Μ** για $M = -10^{-2-\alpha}$ (όπου α το υπόλοιπο τής διαίρεσης του Αριθμού Μητρώου σας με τό 7).

Παράδοση: Πέμπτη 1/4/2004, 9.00-11.00 π.μ. στην αίθουσα Η211 (Εργαστήριο Η/Υ).