Γραμμικός και Μή Προγραμματισμός
Απαντήσεις Άσκησης 6

- Εδώ έχουμε Π.Μ.Γ.Π. με συνάρτηση ισοτικού περιορισμού τήν
$$h(x_1,x_2,x_3)=(\tfrac{x_1}{a})^2+(\tfrac{x_2}{b})^2+(\tfrac{x_3}{c})^2-1$$
οπότε, η συνάρτηση $Lagrange$ αυτού τού προβλήματος ορίζεται από τον τύπο:
$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda)=x_1\ x_2\ x_3-\lambda(\ (\tfrac{x_1}{a})^2+(\tfrac{x_2}{b})^2+(\tfrac{x_3}{c})^2-1)$$
και άρα, τα στάσιμα σημεία της είναι τα $(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*)^T\in\mathbb{R}^4$ γιά τα οποία:
$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*) &= x_2^*x_3^*-\tfrac{2}{a^2}\lambda^*x_1^* &&=0\\
\tfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*) &= x_1^*x_3^*-\tfrac{2}{b^2}\lambda^*x_2^* &&=0\\
\tfrac{\partial L}{\partial x_3}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*) &= x_1^*x_2^*-\tfrac{2}{c^2}\lambda^*x_3^* &&=0\\
\tfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*) &= (\tfrac{x_1}{a})^2+(\tfrac{x_2}{b})^2+(\tfrac{x_3}{c})^2-1 &&=0
\end{aligned}$$
Από τήν επίλυση αυτού τού συστήματος συμπεραίνουμε ότι, σύνολο σημείων στασιμότητος τής L είναι το:
$$K=\{(x^*,\lambda^*)^T=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*)^T\in\mathbb{R}^4:\ |x_1^*|=\tfrac{a}{\sqrt{3}},\ |x_2^*|=\tfrac{b}{\sqrt{3}},\ |x_3^*|=\tfrac{c}{\sqrt{3}},\ \lambda^*=\tfrac{3}{2}x_1^*x_2^*x_3^*\}$$
Κατά συνέπεια, άν $(x^*,\lambda^*)^T=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*)^T$ είναι κάποιο σημείο (απο τα 8) τού K τότε, επειδή
$$\nabla h(x^*)=(\tfrac{2}{a^2}x_1^*,\ \tfrac{2}{b^2}x_2^*,\ \tfrac{2}{c^2}x_3^*)^T=\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{x_1^*},\ \tfrac{1}{x_2^*},\ \tfrac{1}{x_3^*})^T=\quad(\neq 0)$$
έπεται ότι τό x^* είναι κανονικό σημείο τής υπερεπιφάνειας
$$F=\{z\in\mathbb{R}^3:h(z)=0\}$$
και άρα, το εφαπτόμενο επίπεδο $M_{x^*}^F$ τής F στο x^* δίνεται διά:
$$\begin{aligned}
M_{x^*}^F &=\{y\in\mathbb{R}^3:\ \ \nabla h(x^*)^T\cdot y=0\}\\
&=\{y\in\mathbb{R}^3:\ \ \tfrac{y_1}{x_1^*}+\tfrac{y_2}{x_2^*}+\tfrac{y_3}{x_3^*}=0\}\\
&=\{(y_1,\ y_2,\ -\tfrac{x_3^*}{x_1^*}y_1-\tfrac{x_3^*}{x_2^*}y_2)^T:\ \ y_1,\ y_2\in\mathbb{R}\}\quad(*)
\end{aligned}$$
Απομένει να διαπιστώσουμε άν ο περιορισμός τής L στο $F\times\{\lambda^*\}$ παρουσιάζει μέγιστο στο x^*, δηλαδή άν είναι αρνητικά ορισμένος ο πίνακας $HL(x;\lambda^*)|_{x=x^*}$ στο εφαπτόμενο επίπεδο $M_{x^*}^F$, ήτοι άν είναι αρνητικά ορισμένος στο $M_{x^*}^F$ ο πίνακας
$$HL(x;\lambda^*)|_{x=x^*}=\left(\tfrac{\partial^2 L}{\partial x_j\partial x_i}(x^*;\lambda^*)\right)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{a^2}\lambda^* & x_3^* & x_2^*\\ x_3^* & -\frac{2}{b^2}\lambda^* & x_1^*\\ x_2^* & x_1^* & -\frac{2}{c^2}\lambda^*\end{pmatrix}$$
ή ισοδύναμα (χρησιμοποιώντας τούς ορισμούς τών $x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*,\ \lambda^*,\ M_{x^*}^F$), άν $\forall(y_1,y_2)^T\in\mathbb{R}^2-\{0\}$ είναι αρνητικός ο αριθμός
$$(y_1,\ y_2,\ -\tfrac{x_3^*}{x_1^*}y_1-\tfrac{x_3^*}{x_2^*}y_2)\begin{pmatrix}-\frac{x_2^*x_3^*}{x_1^*} & x_3^* & x_2^*\\ x_3^* & -\frac{x_1^*x_3^*}{x_2^*} & x_1^*\\ x_2^* & x_1^* & -\frac{x_1^*x_2^*}{x_3^*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ -\frac{x_3^*}{x_1^*}y_1-\frac{x_3^*}{x_2^*}y_2\end{pmatrix}=$$

$-4\frac{x_3^*}{x_1^* x_2^*}(y_1^2\ (x_2^*)^2 + y_2^2\ (x_1^*)^2 + y_1\ x_2^*\ y_2\ x_1^*).$

Αυτό αληθεύει μόνο άν $-\frac{x_3^*}{x_1^* x_2^*} < 0$ (ο άλλος όρος είναι πάντα θετικός), και άρα σημεία τοπικού μεγίστου τής αντικειμενικής συνάρτησης στο F, είναι τα:

$$\{\tfrac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c),\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-a,-b,c),\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-a,b,-c),\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}(a,-b,-c)\}$$

Σε οποιοδήποτε απο αυτά, η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την τιμή $\frac{abc}{3\sqrt{3}}$ οπότε πρόκειται γιά σημεία ολικού μεγίστου τής αντικειμενικής συνάρτησης στο F και άρα βέλτιστες λύσεις τού Π.Μ.Γ.Π.

- Τα ζητούμενα σημεία είναι αυτά πού ελαχιστοποιούν τήν Ευκλείδια απόσταση από τήν αρχή τών αξόνων και είναι σημεία τής δοσμένης υπερεπιφάνειας, άρα προκύπτουν από την επίλυση τού Π.Μ.Γ.Π.:

$$\begin{aligned}&min\ \sqrt{x^T \cdot x}\\ &h_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\\ &h_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\end{aligned}$$

Για λόγους οικονομίας πράξεων (π.χ. στίς μερικές παραγωγίσεις τής αντικειμενικής συνάρτησης) θα επιλύσουμε το παρακάτω Π.Μ.Γ.Π.:

$$\begin{aligned}&min(x^T \cdot x)\\ &h_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\\ &h_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\end{aligned}$$

δεδομένου ότι αυτά τα δύο προβλήματα έχουν το ίδιο σύνολο βέλτιστων λύσεων (άσκηση 1 τής 7ης ομάδος). Εδώ η συνάρτηση $Lagrange$ αυτού τού προβλήματος ορίζεται από τον τύπο:

$$L(x_1,x_2,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 - 1) - \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

και άρα, τα στάσιμα σημεία της είναι τα $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)^T \in \mathbb{R}^5$ γιά τα οποία:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*) &= 2x_1^* - \lambda_1^*(2x_1^* - x_2^*) - 2\lambda_2^* x_1^* &&= 0\\
\tfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*) &= 2x_2^* - \lambda_1^*(2x_2^* - x_1^*) - 2\lambda_2^* x_2^* &&= 0\\
\tfrac{\partial L}{\partial x_3}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*) &= 2x_3^* + 2\lambda_1^* x_3^* &&= 0\\
\tfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*) &= (x_1^*)^2 - x_1^*x_2^* + (x_2^*)^2 - (x_3^*)^2 - 1 &&= 0\\
\tfrac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*) &= (x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 - 1 &&= 0
\end{aligned}$$

Από τήν επίλυση αυτού τού συστήματος συμπεραίνουμε ότι, σύνολο σημείων στασιμότητος τής L είναι το:

$$K = \{(x^*,\lambda^*)^T = (x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)^T \in \mathbb{R}^5 : |x_1^*| = |x_2^*| = |x_3^*| = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_1^* = -x_2^*, \lambda_1^* = -1, \lambda_2^* = \tfrac{5}{2}\}$$

Κατά συνέπεια, άν $(x^*,\lambda^*)^T = (x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)^T$ είναι κάποιο σημείο τού K τότε, επειδή

$\nabla h_1(x^*) = (2x_1^* - x_2^*, 2x_2^* - x_1^*, -2x_3^*)^T, \nabla h_2(x^*) = (2x_1^*, 2x_2^*, 0)^T$ (γραμμικώς ανεξάρτητα)

έπεται ότι τό x^* είναι κανονικό σημείο τής υπερεπιφάνειας

$$F = \{z \in \mathbb{R}^3 : h(z) = 0\}$$

και άρα, το εφαπτόμενο επίπεδο $M_{x^*}^F$ τής F στο x^* δίνεται διά:

$$\begin{aligned}M_{x^*}^F &= \{y \in \mathbb{R}^3 :\ \nabla h_1(x^*)^T \cdot y = 0, \nabla h_2(x^*)^T \cdot y = 0\}\\ &= \{y \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1^*y_1 - x_2^*y_1 + 2x_2^*y_2 - x_1^*y_2 - 2x_3^*y_3 = 0,\ 2x_1^*y_1 + 2x_2^*y_2 = 0\}\\ &= \ldots\ldots\end{aligned}$$

κ.λ.π..

- Κατ΄ αναλογία με την προηγούμενη άσκηση, οι ζητούμενες τιμές προκύπτουν απο την επίλυση τών Π.Μ.Γ.Π.:

$$\begin{aligned} &max \pm (x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2) \\ &5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8 \end{aligned}$$

κ.λ.π..

- Εδώ έχουμε Π.Μ.Γ.Π. με συνάρτηση ισοτικού περιορισμού τήν

$$h(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - \tfrac{\pi}{4}$$

οπότε, η συνάρτηση $Lagrange$ αυτού τού προβλήματος ορίζεται από τον τύπο:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = cos^2(x_1) + cos^2(x_2) - \lambda(x_1 - x_2 - \tfrac{\pi}{4})$$

και άρα, τα στάσιμα σημεία της είναι τα $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T \in \mathbb{R}^3$ γιά τα οποία:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) &= -sin(2x_1^*) - \lambda &= 0 \\ \tfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) &= -sin(2x_2^*) + \lambda &= 0 \\ \tfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) &= x_1 - x_2 - \tfrac{\pi}{4} &= 0 \end{aligned}$$

Από τήν επίλυση αυτού τού συστήματος συμπεραίνουμε ότι, σύνολο σημείων στασιμότητος τής L είναι το:

$$K = \{(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T = (k\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{8},\ k\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{8},\ \sqrt{2}(-1)^{k+1})^T : k \in \mathbb{Z}\}$$

Κατά συνέπεια, άν $(x^*, \lambda^*)^T = (x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T$ είναι κάποιο σημείο τού K τότε, επειδή

$$\nabla h(x^*) = (1,\ -1)^T \quad (\neq 0)$$

έπεται ότι τό x^* είναι κανονικό σημείο τής υπερεπιφάνειας

$$F = \{z \in \mathbb{R}^2 : h(z) = 0\}$$

και άρα, το εφαπτόμενο επίπεδο $M_{x^*}^F$ τής F στο x^* δίνεται διά:

$$\begin{aligned} M_{x^*}^F &= \{y \in \mathbb{R}^2 : \ \nabla h(x^*)^T \cdot y = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 : \ y_1 - y_2 = 0\} \\ &= \{(y_1,\ y_1)^T : \ \ y_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Απομένει να διαπιστώσουμε άν ο περιορισμός τής L στο $F \times \{\lambda^*\}$ παρουσιάζει μέγιστο στο x^*, δηλαδή άν είναι αρνητικά ορισμένος ο πίνακας $HL(x;\lambda^*)|_{x=x^*}$ στο εφαπτόμενο επίπεδο $M_{x^*}^F$, ήτοι άν είναι αρνητικά ορισμένος στο $M_{x^*}^F$ ο πίνακας

$$HL(x;\lambda^*)|_{x=x^*} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(x^*;\lambda^*)\right) = \begin{pmatrix} -2cos(2x_1^*) & 0 \\ 0 & -2cos(2x_2^*) \end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα (χρησιμοποιώντας τούς ορισμούς τών $x_1^*,\ x_2^*,\ \lambda^*,\ M_{x^*}^F$), άν $\forall (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ είναι αρνητικός ο αριθμός

$$(y_1,\ y_1) \begin{pmatrix} -\sqrt{2}(-1)^k & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}(-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -2\sqrt{2}(-1)^k y_1^2$$

Αυτό αληθεύει μόνο άν k είναι άρτιος, και άρα σημεία τοπικού μεγίστου τής αντικειμενικής συνάρτησης στο F, είναι τα:

$$M = \{(k\pi + \tfrac{\pi}{8},\ k\pi - \tfrac{\pi}{8})^T : k \in \mathbb{Z}\}$$

Σε οποιοδήποτε απο αυτά, η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την τιμή $2cos^2(\frac{\pi}{8})$ οπότε πρόκειται γιά σημεία ολικού μεγίστου τής αντικειμενικής συνάρτησης στο F και άρα βέλτιστες λύσεις τού Π.Μ.Γ.Π.