Γραμμικός και Μή Προγραμματισμός
Απαντήσεις άσκησης 5

20 Μαΐου 2004

- Προσπαθώντας να εντοπίσουμε τα κρίσιμα σημεία από την εξίσωση $\nabla f(x) = 0$, καταλήγουμε σε σύστημα μή γραμμικών εξισώσεων που είναι πολύ δύσκολα επιλύσιμο, πρέπει να αναζητήσουμε με αλγεβρικό τρόπο τίς λύσεις τού Π.Μ.Γ.Π..
  Από τήν παρατήρηση ότι, γιά κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ αληθεύει ότι:
  $$f(x_1, x_2) = sin(x_1 + x_2) - cos(4x_1\ x_2) \leq 2$$
  και ειδικώτερα:
  $$f(x_1, x_2) = 2 \Leftrightarrow (sin(x_1 + x_2) = 1\ \wedge\ cos(4x_1\ x_2) = -1)$$
  οπότε συμπεραίνουμε ότι κάθε στοιχείο τού συνόλου
  $$M = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 :\ (\exists k, \lambda \in \mathbb{Z})\ \ x_1 + x_2 = 2k\pi + \tfrac{\pi}{2}\ \ \wedge\ \ 4x_1\ x_2 = 2\lambda\pi + \pi\}$$
  (το οποίο δέν είναι κενό π.χ. $(\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-4\pi}}{4},\ \frac{\pi-\sqrt{\pi^2-4\pi}}{4})^T \in M$) είναι βέλτιστη λύση τού Π.Μ.Γ.Π

- $\nabla f(x) = (-4x_1 + 4x_2,\ \ 6 + 4x_1 - 10x_2)^T$
  $$Hf(x) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}, \quad (Hf(x))^{-1} = -\tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
  οπότε, οι δύο πρώτες προσεγγίσεις τής μεθόδου $Newton - Raphson$, ξεκινώντας από το σημείο $x_0 = (0, 0)^T$, είναι:
  $$x_1 = x_0 - (Hf(x_0))^{-1} \cdot \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  $$x_2 = x_1 - (Hf(x_1))^{-1} \cdot \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  Επειδή οι δύο διαδοχικές προσεγγίσεις $x_1,\ x_2$ είναι ίδιες, πρέπει να υποθέσουμε ότι η κοινή τιμή τους είναι η βέλτιστη λύση τού Π.Μ.Γ.Π.