Γραμμικός και Μή Προγραμματισμός
Απαντήσεις άσκησης 4

13 Μαΐου 2004

- – α) Η κλίση τής αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0 όταν:
$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= 4 - 2x_1 - 10e^{2x_1+x_2} = 0 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= 5 - 5e^{2x_1+x_2} = 0 \end{aligned}$$
απ' όπου έπεται ότι, σύνολο τών κρίσιμων σημείων της είναι τό $K = \{(-3, 6)\}$.
Εξετάζοντας την Εσσιανή τής f στο τυχαίο σημείο $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, βλέπουμε ότι:
$$Hf(x) = \begin{pmatrix} -2 - 20e^{2x_1+x_2} & -10e^{2x_1+x_2} \\ -10e^{2x_1+x_2} & -5e^{2x_1+x_2} \end{pmatrix}$$
άρα οι άνω αριστερά τετραγωνικοί υποπίνακες τής $-Hf(x)$ έχουν ορίζουσες
$$2 + 20e^{2x_1+x_2}, \quad 10e^{2x_1+x_2} \quad (> 0)$$
οπότε:
$$(\forall x \in \mathbb{R}^2) \quad Hf(x) \text{ είναι αρνητικά ορισμένος πίνακας} \qquad .$$
Κατα συνέπεια η f είναι κοίλη συνάρτηση, και άρα το (-3, 6) είναι σημείο ολικού μεγίστου τής f, οπότε βέλτιστη (και μοναδική) λύση τού Π.Μ.Γ.Π.

  – β) Στά παρακάτω $r = x_1^2 + x_2^2$.
Η κλίση τής αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0 όταν:
$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= -2x_1 e^{-r}(cos(r) + sin(r)) = 0 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= -2x_2 e^{-r}(cos(r) + sin(r)) = 0 \end{aligned}$$
απ' όπου έπεται ότι, σύνολο τών κρίσιμων σημείων της είναι τό:
$$K = \{(0,0)\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\exists \lambda \in \mathbb{N}^*) \ \ x_1^2 + x_2^2 = \lambda\pi - \tfrac{\pi}{4}\}$$
Εξετάζοντας την Εσσιανή τής f στο τυχαίο σημείο $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, βλέπουμε ότι:
$$Hf(x) = \begin{pmatrix} e^{-r}(-2cos(r) + 8x_1^2 sin(r) & 8x_1x_2e^{-r}sin(r) \\ 8x_1x_2e^{-r}sin(r) & e^{-r}(-2cos(r) + 8x_2^2 sin(r)) \end{pmatrix}$$
Άρα οι άνω αριστερά τετραγωνικοί υποπίνακες τής $Hf(x)$ έχουν ορίζουσες, ομόσημες με τούς:
$$D_1 = -2cos(r) + 8x_1^2 sin(r), \quad D_2 = 4cos^2(r) - 16r\ cos(r)\ sin(r) \qquad .$$
Ειδικώτερα πάνω στα σημεία τού K, οι ορίζουσες αυτές είναι ομόσημες με τούς:
(Γιά $\ x_1 = x_2 = 0$) $\ D_1 = -2,\ D_1 = 4$, οπότε $Hf(0)$ αρνητικά ορισμένος.
(Γιά $\ r = \lambda\pi - \frac{\pi}{4},\ \lambda \in \mathbb{N}^*$) $\ D_1 = -(2 + 8x_1^2)cos(r),\ D_2 = (4 + 16r)cos^2(r)$
οπότε η πρώτη είναι ομόσημη με το $-(-1)^\lambda$ ενώ η δεύτερη είναι πάντα θετική. Κατα συνέπεια γι' αυτά τα σημεία, η $Hf(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη για λ άρτιο και θετικά

ορισμένη για λ περιττό.

Συνολικά συμπεραίνουμε ότι το K διαμερίζεται στα εξής υποσύνολα τοπικού Μεγίστου και Ελαχίστου:

$$M = \{(0,0)\} \cup \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\exists \lambda \in \mathbb{N}^*) \;\; x_1^2 + x_2^2 = 2\lambda\pi - \tfrac{\pi}{4}\}$$
$$E = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\exists \lambda \in \mathbb{N}^*) \;\; x_1^2 + x_2^2 = (2\lambda - 1)\pi - \tfrac{\pi}{4}\}$$

Απομένει να δούμε ποιά σημεία τού M είναι σημεία ολικού μεγίστου.Απο την παρατήρηση ότι: $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}) \;\; f(0) = 1 > e^{-r} \geq e^{-r}cos(r) = f(x)$

συμπεραίνουμε τελικά ότι το 0 είναι σημείο ολικού μεγίστου τής f και άρα βέλτιστη (και μοναδική) λύση τού Π.Μ.Γ.Π.

Σημείωση: Το τελικό αποτέλεσμα παράχθηκε απο την τελευταία παρατήρηση (και μόνο).

– γ) Η κλίση τής αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0 όταν:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= -1 + x_2 = 0 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= x_1 = 0 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} &= 3x_3(x_3 - 1) = 0 \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι, σύνολο τών κρίσιμων σημείων της είναι τό $K = \{(0,1,0),(0,1,1)\}$. Εξετάζοντας την Εσσιανή τής f στο τυχαίο σημείο $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, βλέπουμε ότι:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6x_3 - 3 \end{pmatrix}$$

οπότε οι ιδιοτιμές τής $Hf(x)$ είναι

$$-1, \;\; 1, \;\; 3 - 6x_3$$

και άρα:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^3) \quad Hf(x) \text{ μη ορισμένος πίνακας}$$

Κατα συνέπεια τα (0, 1, 0), (0, 1, 1) είναι σαγματικά σημεία, οπότε η f δέν έχει σημεία τοπικού μεγίστου, και άρα αυτό το Π.Μ.Γ.Π δέν έχει βέλτιστη λύση.

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε απλούστερα, άν παρατηρούσαμε ότι:

$$lim_{t\to\infty} \; f(0,0,t) = lim_{t\to\infty} \; (-3t + t^3) = \infty$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι το Π.Μ.Γ.Π. είναι μή-φραγμένο.

- $f(x_1,x_2) = 6x_2 - 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2$
  $\nabla f(x_1,x_2) = (-4x_1 + 4x_2, \; 6 + 4x_1 - 10x_2)$

οπότε τα 2.5 πρώτα βήματα τού αλγορίθμου βαθμίδος είναι (το επόμενο μόνοι σας):

n	x_n	$\nabla f(x_n)$	$\parallel \nabla f(x_n) \parallel$	$x_n + t\nabla f(x_n)$	$g(t) = f(x_n + t\nabla f(x_n))$	t^*	x_{n+1}
0	$(0,0)$	$(0,6)$	$6(>\epsilon)$	$(0,6t)$	$36t - 180t^2$	$\frac{1}{10}$	$(0,\frac{3}{5})$
1	$(0,\frac{3}{5})$	$(\frac{12}{5},0)$	$\frac{12}{5}(>\epsilon)$	$(\frac{12}{5}t,\frac{3}{5})$	$\frac{1}{25}(45 + 144t - 288t^2)$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{3}{5},\frac{3}{5})$
2	$(\frac{3}{5},\frac{3}{5})$	$(0,\frac{12}{5})$	$\frac{12}{5}(>\epsilon)$	$(\frac{3}{5}t,\frac{3}{5}+\frac{12}{5}t)$	...	...	...
3	...	...	....	...	...	...	...