ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Χειμερινό εξάμηνο 2020-21**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Θ. Φειδάς**

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
προαπαιτούμενες γνώσεις

Οδηγίες:

Για να παρακολουθήσετε το μάθημα Απειροστικός Λογισμός θα πρέπει να έχετε κάποιες γνώσεις, από την ύλη του Γυμνασίου και Λυκείου. Κατά τη διδασκαλία θα υποτεθή οτι τις γνώσεις αυτές τις έχετε. Σημειώστε οτι οι γνώσεις που αναφέρονται είναι αναγκαίες ΟΛΕΣ - όχι ‵αρκετές από αυτές′. Με άλλα λόγια το ‵αρκεί να παίρνω 5 στα 10′ εδώ δεν ισχύει. Οι γνώσεις αυτές είναι:

Ι. Άλγεβρα και οι στοιχειώδεις αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών: Δείτε το αρχείο (pdf)

`http://fourier.math.uoc.gr/~mk/moodle/mod/page/view.php?id=7`

Επίσης θυμηθήτε τα εξής, με απόδειξη (αν δεν την βρείτε εύκολα, ρωτήστε στην αρχή του μαθήματος):

- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.
- $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) = (\alpha\gamma+\beta\delta)^2 + (\alpha\delta-\beta\gamma^2)$.
- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma).(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$.
- Αν $1 \neq \alpha$ τότε $\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} = \alpha^{n-1} + \ldots + \alpha^k + \ldots + \alpha + 1$.
- $(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$ οπου για $k \neq 0$ ορίζουμε $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ και $0! = 1$.

[*Σημείωση:* Η απόδειξη της τελευταίας ταυτότητας είναι σχετικά περίπλοκη, χρειάζεται γνώσεις από την περιοχή των Μαθηματικών που ονομάζεται ‵Συνδυαστική Ανάλυση′, θα δοθή σε επόμενο μάθημα και όχι εδώ.]

ΙΙ. Γεωμετρία.

Είναι βασικό να γνωρίζετε κριτήρια ισότητας και ομοιότητας τριγώνων, επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες, ιδιότητες στοιχείων τριγώνων και παραλληλογράμμων.

ΙΙΙ. Τριγωνομετρία.

Θυμηθήτε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις *ημιτόνου*, συμβολικά $\sin(\theta)$ και *συνημιτόνου*, συμβολικά $\cos(\theta)$, μίας γωνίας θ και τη γεωμετρική ερμηνεία τους. Θυμηθήτε τους τύπους

- $[\cos(\theta)]^2 + [\sin(\theta)]^2 = 1$
- $\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$ (‵Νόμος συνημιτόνου αθροίσματος γωνιών′) και
- $\sin(\theta+\phi) = \cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)$ (‵Νόμος ημιτόνου αθροίσματος γωνιών′).

IV. Στοιχειώδης Λογική. Ιδιατέρως: Τι σημαίνουν οι *ποσοδείκτες* $\exists$ (`Υπάρχει') και $\forall$ (`Για κάθε'). Σημειώστε επίσης οτι όταν γράφουμε μία πρόταση στη μορφή $\phi(x)$, δηλ. η ως πρόταση που εξαρτάται από την μεταβλητή x, τότε όταν ισχυρόμαστε οτι *η* $\phi(x)$) *είναι αληθής* (σε κάποια μαθηματική δομή A) εννοούμε οτι ο $\phi(x)$ είναι αληθής γα όλες τις επιτρεπτές τιμές του x. Π.χ. αν ισχυριστούμε οτι ο τύπος $\exists y \; x = y + y$ είναι *αληθής* στους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$, αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχυριστούμε οτι η *πρόταση* $\forall x \; \exists y \; x = y + y$ είναι αληθής.

V. Μαθηματική επαγωγή. Ειδικά στις εξής δύο μορφές:

A. Αν $\phi(x)$ εξαρτάται από την μεταβλητή x, η οποία παίρνει τιμές στους μη αρνητικούς ακεραίους $\mathbb{N}_0$, και τα εξής είναι αληθή:

α) $\phi(0)$ και

β) $\forall x \in \mathbb{N}_0 \; [\phi(x) \to \phi(x+1)]$,

τότε και η πρόταση

$\forall x \in \mathbb{N}_0 \; \phi(x)$

είναι αληθής. Μπορούμε να το πούμε και ως εξής:

$$[\phi(0) \text{ και } \forall x \in \mathbb{N}_0 \; (\phi(x) \to \phi(x+1))] \to \forall x \in \mathbb{N}_0 \; \phi(x) \; .$$

(Το σύμβολο $\to$ διαβάζεται ως `συνεπάγεται'.)

B. Αν $\phi(x)$ εξαρτάται από την μεταβλητή x, η οποία παίρνει τιμές στους μη αρνητικούς ακεραίους $\mathbb{N}_0$, και τα εξής είναι αληθή:

α) $\phi(0)$ και

β) $\forall x \in \mathbb{N}_0 \; [(\forall y \in \mathbb{N}_0 \; (y \leq x \to \phi(y))) \to \phi(x+1)]$,

τότε και η πρόταση

$\forall x \in \mathbb{N}_0 \; \phi(x)$

είναι αληθής.

Γ. Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$ έχει ένα ελάχιστο (ως προς τη φυσική διάταξη του $\mathbb{N}_0$) στοιχείο.

VI. Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων. Ειδικά τις έννοιες *ανήκειν* ($\in$), *υποσύνολο* ($\subset$), *ένωση* ($\cup$), *τομή* ($\cap$), *συμπλήρωμα* (^{c}).

Τι είναι μία *συνάρτηση*, το πεδίο ορισμού της και το πεδιο τιμών της. Τι σημαίνει μία συνάρτηση να είναι *ένα-προς-ένα* και τι σημαίνει να είναι *επί.* Τι ειναι η *εικόνα* ενός συνόλου μέσω μίας συνάρτησης.

Ορισμοί και συντομογραφίες:

• $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των *Φυσικών Αριθμών*: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

• $\mathbb{N}_0$ είναι το σύνολο των *Μη Αρνητικών Ακεραίων*: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

• $\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των *Ακεραίων Αριθμών*: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

• $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των *Ρητών Αριθμών*: $\mathbb{Q} = \{\frac{\mu}{\nu} : \; \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \; \nu \neq 0\}$.

• $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των *Πραγματικών Αριθμών*. Θα περιγραφή με αυστηρό (αξιωματικό) τρόπο κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Το $\mathbb{R}$ περιλαμβάνει το (ὲιναι υπερσύνολο΄ του) $\mathbb{Q}$ αλλά έχει και αριθμούς που δεν είναι ρητοί (αυτοί ονομάζονται *άρρητοι αριθμοί*). Ο $\sqrt{2}$ και ο π (ο λόγος του μήκους περιφερείας κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου) είναι δύο παραδείγματα αρρήτων.

Ασκήσεις από προαπαιτούμενη ύλη

Με [Δ] σημειώνονται 'δύσκολες' ασκήσεις - αν δεν τα καταφέρετε να τις λύσετε μην απογοητευτείτε, θα τις λύσουμε και μαζύ. Γράψτε πλήρεις απαντήσεις.

Άσκηση1: α) Δώστε έναν τρόπο κατασκευής της μεσοκαθέτου δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με κανόνα και διαβήτη (με την έννοια της ευκλειδίου γεωμετρίας). Στη συνέχεια αποδείξτε οτι η κατασκυεή σας είναι σωστή, δηλ. οτι η ευθεία που κατασκευάσατε είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ. Ποιά θεωρήματα χρησιμοποιήσατε;

β) Αποδείξτε οτι οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών ενός τριγώνου έχουν κοινό σημείο. (Αυτό, που είναι προφανώς μοναδικό, λέγεται *περίκεντρο* του τριγώνου).

γ) Αποδείξτε οτι η εγγεγραμμένη γωνία ενός τόξου κύκλου, που βρίσκεται από την ίδια πλευρά της χορδης του τόξου όπως και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία του τόξου, έχει το μισό μέγεθος της επίκεντρης γωνίας. [*Υπόδειξη:* Έστω κύκλος Κ, τόξο του ΑΒ, μικρότερο του π, με κέντρο του κύκλου Ο και σημείο Ρ της περιφερείας του κύκλου, προς την ίδια πλευρά της χορδής ΑΒ όπως και το Ο. Ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα το Ο με τα Α, Β και Ρ. Συμβολίζουμε με α τη γωνία ΑΡΟ και με β την ΟΡΒ. Παρατηρούμε οτι τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ είναι ισοσκελή και οτι η εγγεγραμμένη γωνία ΑΡΒ ισούται με α+β. Επεκτείνουμε την ΡΟ ως το σημείο τομής με την περιφέρεια του κύκλου, Γ. Παρατηρούμε οτι η γωνία ΑΟΓ ισούται με 2α (γιατί;) και, ομοίως, η ΒΟΓ ισούται με 2β. Άρα η επίκεντρη γωνία του τόξου ΑΒ, που είναι η γωνία ΑΟΜ, ισούται με δύο φορές την εγγεγραμμένη γωνία του ΑΒ.]

Άσκηση 2: Αποδείξτε οτι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο. Ποιά αποδεικτική μέθοδο χρησιμοποιήσατε;

Άσκηση 3: α) Γράψτε το τυχόν πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $ax^2 + bx + c$ (οπου a, b, c είναι κάποιες σταθερές) ως ταυτοτικά ίσο με ένα πολυώνυμο της μορφής $\mu(x+\tau)^2 + \nu$, οπου τα μ, τ και ν είναι σταθερές.

β) Αποδείξτε το εξής (αγνοήστε τις γνώσεις που πιθανόν έχετε γα διαίρεση πολυωνύμων, η απόδειξή σας εδώ να γίνη με 'γυμνά χέρια'): Έστω $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ένα πολυώνυμο της μεταβλητής x, βαθμού 3 (τα a, b, c, d είναι πραγματικές σταθερές). Έστω οτι ρ είναι μία ρίζα του. Τότε το πολυώνυμο $x - \rho$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$, δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $g(x)$ τέτοιο που να ισχίη ταυτοτικά $f(x) = (x - \rho)g(x)$. Αν τα ρ, a, b, c, d είναι ρητοί αριθμοί τότε και οι συντελεστές του πολυωνύμου g είναι ρητοί αριθμοί.

γ) Βρείτε όλες τις ρητές ρίζες του πολυωνύμου $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε πρώτα το εξής: *Αν* $f(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$ *είναι πολυώνυμο της μεταβλητής* x *και οι συντελεστές* $a_n, \ldots, a_1, a_0$ *είναι ακέραιοι αριθμοί, και αν* $\rho = \frac{\kappa}{\lambda}$ *είναι μία ρίζα του* f, *οπου* κ *και* λ *σχετικώς πρώτοι ακέραιοι, τότε ο* κ *διαιρεί τον* a_0 *και ο* λ *διαιρεί τον* a_n.]

δ) Παραγοντοποιείστε το πολυώνυμο δύο μεταβλητών $x^3 - y^3 + 3xy + 1$ σε δύο μη σταθερούς παράγοντες, δηλ. γράψτε το ταυτοτικά ως fg οπου f και g είναι μη σταθερά πολυώνυμα των x και y.

Άσκηση 4: α) Βρείτε όλα τα x και y για τα οποία $x^3 + y^3 - 1 + 3xy = 0$.

β) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των λύσεων της εξίσωσης του α). [Δηλαδή χαρακτηρίστε γεωμετρικά το σύνολο των λύσεων (x, y) της εξίσωσης. Θα μπορούσε, για παράδειγμα, να είναι μία περιφέρεια κύκλου, ή η ένωση μίας ευθείας και μίας παραβολής.]

Άσκηση 5: α) Αποδείξτε οτι

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 \ .$$

[*Υπόδειξη:* Με μαθηματική επαγωγή.]

β) Αποδείξτε οτι

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

[*Υπόδειξη:* Με μαθηματική επαγωγή.]

Άσκηση 6: α) Βρείτε τα ημίτονα και συνημίτονα των γωνιών 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ [*Υπόδειξη:* Για τα δύο τελευταία, χρησιμοιήστε την εξής θεώρηση: Αν θ είναι μία γωνία της οποίας οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι γνωστοί και αν $2\phi = \theta$, τότε από τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων έχουμε $\sin(\theta) = 2\cos(\phi)\sin(\phi)$ και $\cos(\theta) = [\cos(\phi)]^2 - [\sin(\phi)]^2 = 2[\cos(\phi)]^2 - 1$. Αν $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ τότε $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ και το ημίτονο και το συνημίτονο της ϕ είναι αριθμοί μεταξύ 0 και 1 (όλα αυτά έπονται από το γεωμετρικό ορισμό του ημιτόνου και συνημιτόνου). Συνεπώς, από τη δεύτερη ισότητα, αν η εξίσωση $\cos(\theta) = 2X^2 - 1$ έχη μόνο μία λύση που είναι πραγματικός αριθμός, μεταξύ 0 και 1, τότε αυτό είναι το συνημίτονο της γωνίας ϕ.]

β) Αποδείξτε τα ερωτήματα του α) γεωμετρικά. Π.χ. για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της $\frac{\pi}{4}$ κατσκευάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου μία γωνία είναι $\frac{\pi}{4}$. Βρείτε τη σχέση των καθέτων πλευρών του τριγώνου και της υποτείνουσας.

γ) [Δ] Βρείτε τα ημίτονα και συνημίτονα των γωνιών $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{\pi}{6}$. [*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε οτι $\cos(3\phi) = [2\cos(\phi)^2 - 1]\cos(\phi) - [2\cos(\phi)\sin(\phi)]\sin(\phi) = 4\cos^3(\phi) - 3\cos(\phi)$. Συνεπώς, αν το πολυώνυμο $\cos(3\phi) = 4X^3 - 3X$ της μεταβλητής X έχη ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$, αυτή πρέπει να ισούται με το συνημίτονο της ϕ. Θυμάστε πώς βρίσκει κανείς ρητές ρίζες πολυωνύμων με ακεραίους συνελεστές; Διαλέξτε κατάλληλα ϕ και θ για να εφαρμόσετε τα παραπάνω.]

δ) [Δ] Κάνετε ότι ζητά το β) αλλά με γεωμετρικό τρόπο. Μϊα μέθοδος είναι η εξής: Θεωρήστε ορθογώνιο τρίγωνο ABC με τη γωνία $\hat{A}$ ορθή. Από το μέσο M της υποτείνουσας BC φέρετε παράλληλο προς την AB. Αυτή τέμνει την AC στο σημείο D. Παρατηρήστε οτι το τρίγωνο DMC είναι ορθογώνιο, με μία γωνία κοινή με το ABC, άρα όμοιο προς αυτό, με λόγο αναλογίας $1 : 2$. Στο τριγωνο AMC η μεσοκάθετος MD είναι και ύψος, άρα το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές (αν αυτό το επιχείρημα σας είναι άγνωστο, αποδείξτε το). Άρα τα μήκη των MC και AM είναι ίσα. Αυτό αποδεικνύει οτι *Η διάμεσος προς την υποτείνουσα* (AM) *ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας.* [Αποδείξτε το συμπέρασμα της προηγούμενης πρότασης χρησιμοποιώντας το οτι *η επίκεντρη γωνία - δηλ. με κορυφή στο κέντρο - ενός τόξου κύκλου έχει το διπλάσιο μέγεθος της γωνίας που έχει τα ίδια άκρα και είναι εγγεγραμένη -δηλ. έχει την κορυφή της επί της* *περιφερείας - του κύκλου.* Αποδείξτε την πρόταση αυτή.] Τώρα, στην ειδική περίπτωση οπου η γωνία $\hat{B}$ ισούται με $\frac{\pi}{3}$, το τρίγωνο AMB έχει τις πλευρές AM και BM ίσες. Άρα η γωνία BAM ισούται με τη γωνία $\hat{B}$, δηλ. με $\frac{\pi}{3}$. Αλλά τότε και η γωνία AMB ισούται με $\frac{\pi}{3}$ (γιατί;). Άρα το τρίγωνο ABM είναι ισόπλευρο. Άρα $AB = BM = \frac{1}{2}BC$. Μεταφράστε το εύρημα αυτό με όρους τριγωνομετρίας και υπολογίστε το ημίτονο και συνημίτονο της γωνίας $\frac{\pi}{3}$. Και, αφ' ού $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, υπολογίστε και το ημίτονο και συνημίτονο της $\frac{\pi}{6}$.

Άσκηση 7: α) Αποδείξτε τον τύπο

$\sin(\theta) + \sin(\phi) = 2\cos(\frac{\theta-\phi}{2})\cos(\frac{\theta+\phi}{2})$.

β) Μαντέψετε και αποδείξτε παρόμοιους τύπους για τα $\cos(\theta) + \cos(\phi)$ και $\cos(\theta) - \cos(\phi)$.

Άσκηση 8: α) Σε ένα τρίγωνο ABC η γωνία $\hat{A}$ έχει συνημίτονο ίσο με $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και η γωνία $\hat{B}$ έχει ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$. Ποιό μπορεί να είναι το συνημίτονο της γωνίας C;

β) Αν $\sin(\theta) = \rho$, ποιές είναι οι λύσεις x της εξίσωσης $\sin(x) = -\rho$;

Άσκηση 9: α) Αποδείξτε οτι υπάρχει μία σταθερά A τέτοια ώστε για όλα τα θ ισχύει

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = A\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \ .$$

β) [Δ] Αποδείξτε οτι γιά κάθε σταθερές α και β υπάρχουν σταθερές A και μ τέτοιες ώστε για όλα τα θ ισχύει

$$\alpha\cos(\theta) + \beta\sin(\theta) = A\sin(\theta + \mu) \ .$$

Παρατηρήστε το εξής αποτέλεσμα των παραπάνω στη Φυσική: Στο φυσικό μέγεθος που ονομάζεται 'κύμα' - π.χ. ο ήχος, κάθε σημείο του μέσου μετάδοσης - π.χ. του αέρα - κινείται απομακρυνόμενο από την αρχική του θέση (που λέγεται 'θέση ισορροπίας') κατά μία συνάρτηση $f(t)$ του χρόνου t. Όταν η συνάρτηση $f(t)$ έχη τη μορφή $f(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$ ή $f(t) = A\sin(\omega t + \phi_0)$ το κύμα λέγεται 'αρμονικό' - Η σταθερά ω λέγεται 'συχνότητα' η A λέγεται 'ένταση' και η ϕ_0 'φάση'. Όταν δύο κύματα με την ίδια κατεύθυνση (δεν θα αναλύσουμε εδώ τι σημαίνει αυτός ο όρος) βρεθούν στο ίδιο σημείο, τότε λέμε οτι 'τα κύματα συμβάλλουν'. Το αποτέλεσμα, που ονομάζεται 'συμβολή' των δύο κυμάτων, είναι ένα νέο κύμα. Κατά τη συμβολή κυμάτων με την ίδια κατεύθυνση το σημείο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας κατά το αλγεβρικό άθροισμα των συναρτήσεων που εκπροσωπούν τα δύο κύματα. Συνεπώς, αν δύο αρμονικά κύματα, με συναρτήσεις απομάκρυνσης $\alpha\cos(t)$ και $\beta\sin(t)$ συμβάλλουν, το παραγόμενο κύμα είναι επίσης αρμονικό. Δείξτε οτι αυτό αληθεύει για οποιαδήποτε αρμονικά κύματα που συμβάλλουν, δηλαδή οτι *η συμβολή αρμονικών κυμάτων είναι αρμονικό κύμα.* Διατυπώστε το πρόβλημα με όρους μαθηματικών και δώστε απόδειξη. [Αποδείξτε το πρώτα για κύματα ίδιας συχνότητας και μετά γενικά.]

Το οτι η συμβολή αρμονικών κυμάτων είναι αρμονικό κύμα είναι αισθητό στην καθημερινότητα. Για παράδειγμα, μπορείτε να ξεχωρίσετε την ομιλία ανθρώπων ή ζώων ή μουσική από έναν κρότο (π.χ. το σπάσιμο ενός πιάτου). Αυτό συμβαίνει κυρίως επειδή η πλειονότητα των ηχητικών κυμάτων ομιλίας ή μουσικής είναι αρμονικά (και, όσο πολλά και διαφορετικά και να είναι, η συμβολή τους, δηλαδή το τελικό αποτέλεσμα που ακούμε, είναι επίσης αρμονικό).

Άσκηση 10:

α) Έστωσαν δύο διαφορετικά σημεία (x_0, y_0) και (x, y), επί μίας ευθείας, που δεν είναι 'κατακόρυφος', δηλ. δεν είναι παράλληλη στον άξονα των y. Αποδείξτε οτι ο λόγος

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{1}$$

είναι σταθερός ως προς το (x, y), δηλ. αν πάρουμε κάποιο σημείο (x_1, y_1), διαφορετικό από το (x, y) θα έχουμε $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

β) Αποδείξτε γεωμετρικά οτι, αν γ είναι μία σταθερά, τότε το σύνολο των σημείων (x, y)για τα οποία ισχύει οτι $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \gamma$ είναι μία ευθεία. [Ο λόγος $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ λέγεται 'κλίση' της ευθείας.]

γ) Συμπεράνετε από τα παραπάνω οτι:

Ένα υποσύνολο του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ είναι ευθεία αν και μόνο αν

υπάρχουν σταθερές α, β και γ, τέτοιες ώστε οι α και β δεν είναι και οι δύο ίσες με μηδέν και τέτοιες ώστε το υποσύνολο να γράφεται ως $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y = \gamma\}$.

Άσκηση 11:

α) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = \alpha^{n-1} + \ldots + \alpha + 1 \tag{2}$$

για $\alpha \neq 1$ και $n = 1, 2, \ldots$. Μετά αποδείξτε την

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-1} + \beta\alpha^{n-2} + \ldots \beta^k \alpha^{n-k} + \ldots \alpha + 1 \tag{3}$$

για $\alpha \neq \beta$.

β) Γράψτε τον αριθμό $10 + 10^2 + 10^3 + 10^4$ σε κλασματική μορφή, σε 10 δευτερόλεπτα.

γ) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)\ . \tag{4}$$

δ) Παρατηρήστε οτι, λόγω της προηγούμενης ταυτότητας, για οποιουσδήποτε δεδομένους αριθμούς μ και ν μπορούμε να βρούμε μία ρίζα (δηλ. τιμή του x για την οποία η τιμή της παράστασης είναι μηδέν) του πολυωνύμου $x^3 - 3\mu\nu x + \mu^3 + \nu^3$ (ποιά είναι αυτή η ρίζα;), και άρα όλες τις ρίζες του (εξηγήστε σύντομα το πώς). Για παράδειγμα βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $x^3 - 6x + 9$.

Άσκηση 12: α) Ζωγραφίστε το γράφημα της συνάρτησης $y = f(x)$ οπου $f(x) = x^2$ και της $y = x^2 + 2x - 1$. Πώς θα μπορούσε κάποιος να κατασκευάση το γράφημα της δεύτερης μετακινώντας το γράφημα της πρώτης; [*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε οτι η σχέση $y = x^2 + 2x - 1$ είναι ισοδύναμη με την $y + 2 = (x + 1)^2$].

β) [Δ] Θεωρήστε οτι σας έχουν δώσει το γράφημα μίας συνάρτησης $y = f(x)$, φτιαγμένο από ένα άκαμπτο υλικό, π.χ. σύρμα αμελητέου πάχους, σε ένα καρτεσιανό ('ορθογώνιο') σύστημα συνετατεγμένων. Αν α και β είναι κάποιες σταθερές, πώς μπορείτε να φτιάξετε το γράφημα της συνάρτησης $y + \beta = f(x + \alpha)$; [*Υπόδειξη:* Με δεδομένο το γράφημα της $y = f(x)$, σκεφθείτε ποιάς συνάρτησης γράφημα είναι αυτό που θα προκύψη αν μετακινήσετε το γράφημα, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, κατά μ μονάδες 'παράλληλα προς το αρχικό και προς τα άνω' - δηλ. παράλληλα προς τον άξονα των y και προς τη θετική κατεύθυνση. Μετά αναρρωτηθήτε το ιδιο αν το γράφημα μετακινηθή παράλληλα 'προς τα δεξιά'.]

γ) [Δ] Πώς μπορείτε να κατασκευάσετε το γράφημα μίας συνάρτησης $y = g(x)$ αν γνωρίζετε (με την έννοια του α» το γράφημα της αντιστρόφου συνάρτησης της $g(x)$; [*Σημείωση:* Για δύο συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to A$, το οτι *οι συναρτήσεις f και g είναι αντίστροφες, η μία της άλλης*, σημαίνει οτι για κάθε x στο A και κάθε y στο B συμβαίνουν οι σχέσεις $g(f(x)) = x$ και $f(g(y)) = y$. Για παράδειγμα, η αντίστροφη της $x - 1$ είναι η $x + 1$, η αντίστροφη της x^2 είναι η $\sqrt{x}$ και η αντίστροφη της e^x είναι η $\log x$, με τα A και B κατάλληλα ορισμένα σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις - καθορίστε τα.]

[*Σημείωση:* Η αντίστροφη συνάρτηση μίας δεδομένης συνάρτησης, αν υπάρχη, είναι μοναδική. Αλλά δεν θα το αποδείξουμε εδώ.]

δ) Σχεδιάστε κατά προσέγγιση το γράφημα της $y = e^x$. Στη συνέχεια σχεδιάστε κατά προσέγγιση το γραφημα της $y = \ln x$, αξιοποιώντας τα ευρήματά σας στο ερώτημα γ).

Άσκηση 13: [*Υπενθύμιση:* Αν α είναι μία θετική σταθερά τότε η συνάρτηση $\log_\alpha x$ είναι η αντίστροφη της συνάρτησης α^x, δηλαδή είναι το y για το οποίο $\alpha^y = x$. Με $\ln x$ συμβολίζουμε το λογάριθμο του x για $\alpha = e$, οπου e είναι μία συγκεκριμμένη σταθερά, γνωστή και ως *βάση των φυσικών λογαρίθμων* - θα μιλήσουμε αργότερα γι' αυτήν]

α) Αποδείξτε οτι

$$\log_\alpha(xy) = \log_\alpha x + \log_\alpha y \ .$$

β) Αποδείξτε οτι, για οποιεσδήποτε θετικές σταθερές α και β,

$$\log_\beta x = \log_\beta \alpha \cdot \log_\alpha x \ .$$

γ) Υπολογίστε με ακρίβεια, σε 20 δευτερόλεπτα τον αριθμό $\frac{\log_4(104)}{\log_2(13)}$.

Άσκηση 14: α) Αποδείξτε οτι αν τα α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί τότε

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$$

και η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta$. Επίσης

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \geq (\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{3}} \ .$$

και η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma$.

β) [Δ] Έστωσαν θετικοί αριθμοί $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Η ποσότητα $\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}$ ονομάζεται *αριθμητικός μέσος* των $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ και η ποσότητα $(\alpha_1 \cdot \alpha_n)^{\frac{1}{n}}$ ονομάζεται *γεωμετρκός μέσος* των $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Αποδείξτε οτι ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου, δηλαδή

$$\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} \geq (\alpha_1 \cdot \alpha_n)^{\frac{1}{n}} \ .$$

και η ισότητα ισχύει μόνον αν $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$.

[*Υπόδειξη:* Η ακόλουθη παρατήρηση ίσως κάνη τη ζωή ευκολότερη (στην προσπάθεια απόδειξης). Μπορεί κανείς να υποθέση, χωρίς βλάβη της γενικότητας, οτι $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n$. Το υποθέτουμε. Στη συνέχεια, διαιρώντας και τις δύο πλευρές διά του α_n βλέπουμε οτι μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\alpha_n = 1$, άρα στο εξής υποθέτουμε οτι

$\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n = 1$.

Τώρα χρησιμοποιείστε επαγωγή.]

Άσκηση 15: Θυμηθήτε τι σημαίνει *αριθμητική πρόοδος* και τι *γεωμετρική πρόοδος*. Ποιά είναι μία απλοποιημένη μορφή του αθροίσματος των στοιχείων μίας αριθμητικής προόδου; Μϊας γεωμετρικής πρόδου;

Άσκηση 16: Θεωρήστε την πρόταση:

Αν βρέξη τότε τα σταφύλια θα χαλάσουν.

Βρείτε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες με αυτήν, δηλ. είναι αλήθεια ακριβώς (με άλλα λόγια: `*τότε και μόνον τότε*') όταν η δεδομένη είναι αληθής. Εξηγήστε γιατί.

Α. Εάν τα σταφύλια χαλάσουν τότε θα έχη βρέξη.

Β. Εάν τα σταφύλια δεν χαλάσουν τότε δεν θα έχη βράξη.

Γ. Εάν δεν βρέξη τότε τα σταφύλια δεν θα χαλάσουν.

Άσκηση 17: Αποδείξτε οτι, αν η $\phi(x)$ είναι μία καλώς ορισμένη πρόταση - δηλαδή έχει νόημα - και εξαρτάται από την παράμετρο x, τότε η πρόταση $\forall x \in \emptyset[\phi(x)]$ είναι αληθής ($\emptyset$ είναι το κενό σύνολο).