

MEM103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τμήμα Α

Επαναληπτικές Ασκήσεις 1

Τρίτη, 03/11/15 - Τετάρτη, 04/11/15

Άσκηση 1.1 Εάν A και B είναι σύνολα, τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$$\alpha'. A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$$

$$\beta'. A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$$

$$\gamma'. A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$$

Άσκηση 1.2 Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A και B ισχύει:

$$\alpha'. \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B) = \mathfrak{P}(A \cap B)$$

$$\beta'. \mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cup B)$$

Πότε ισχύει η ισότητα για το β' ;

Άσκηση 1.3 Βρείτε την ένωση και την τομή των παρακάτω οικογενειών συνόλων με σύνολο δεικτών το σύνολο A .

$$\alpha'. A = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad S_a = [-a - 1, a + 1].$$

$$\beta'. A = \mathbb{N} \quad S_n = \left(0, 2 + \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 + \frac{1}{n}\right\}.$$

Άσκηση 1.4 Έστω R μια διμελής σχέση πάνω στο σύνολο όλων των θετικών ακεραίων τέτοια ώστε

$$R = \{(a, b) \mid \text{το } a - b \text{ είναι ένας περιττός θετικός ακέραιος}\}.$$

Είναι η R ανακλαστική; Συμμετρική; Αντισυμμετρική; Μεταβατική; Είναι μία σχέση ισοδυναμίας; Είναι μία σχέση μερικής διάταξης;

Άσκηση 1.5 Έστω $S = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Δίνεται η σχέση ισοδυναμίας στο S :

$$x \sim y \iff x^3 - 6x^2 + 11x = y^3 - 6y^2 + 11y.$$

Βρείτε όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας.

Άσκηση 1.6 Έστω οι συναρτήσεις:

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 4 \ln(x) + 2$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad g(x) = e^{x^2}.$$

Βρείτε τα σύνολα $f([e, e^2])$, $f^{-1}([-1, 1])$, $g([-3, -2])$ και $g^{-1}([1, 2])$.