

## MEM103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## Τμήμα Α

## Εργαστήριο Προβλημάτων 2

Τρίτη, 20/10/15 - Τετάρτη, 21/10/15

**Άσκηση 2.1** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σύνολα  $A, B, C$  ισχύουν οι ταυτότητες:

$$\alpha'. (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$\beta'. A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$\gamma'. A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

**Άσκηση 2.2** Θεωρούμε τις σχέσεις  $\rho$  και  $\sigma$  στο  $X$ , δηλαδή  $\rho, \sigma \subseteq X \times X$ . Εάν οι  $\rho$  και  $\sigma$  είναι ανακλαστικές, δείξτε ότι η  $\rho \cup \sigma$  και η  $\rho \cap \sigma$  είναι επίσης ανακλαστικές. Είναι η σχέση  $\rho \setminus \sigma$  ανακλαστική;

**Άσκηση 2.3** Δίδουμε διάφορες σχέσεις στο  $\mathbb{R}$ . Ποιές από αυτές είναι ανακλαστικές, συμμετρικές, μεταβατικές;

$$\alpha'. x < y$$

$$\delta'. |x - y| \leq 0$$

$$\beta'. x \geq y$$

$$\epsilon'. x - y \text{ είναι ρητός}$$

$$\gamma'. |x - y| < 1$$

$$\sigma'. x - y \text{ είναι άρρητος}$$

**Άσκηση 2.4** Στο  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ορίζουμε τη σχέση  $\sigma$ , δηλαδή  $\sigma \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ , ως εξής:

$$(m, n) \sigma (r, s) \quad \text{εάν} \quad m + s = r + n.$$

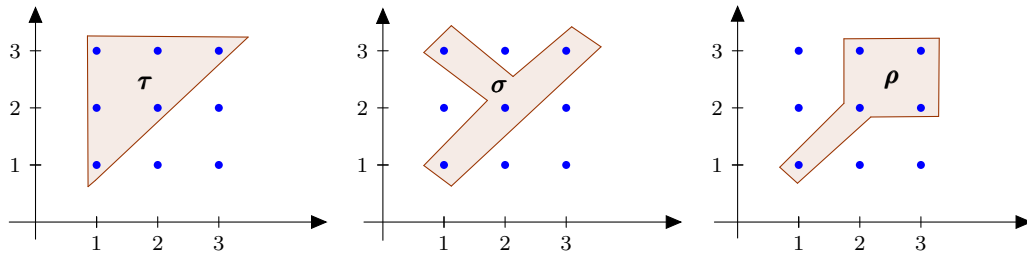
Δείξτε ότι η  $\sigma$  είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης αντιστοιχούν με φυσιολογικό τρόπο στα στοιχεία ενός γνωστού συνόλου. Ποιό είναι αυτό;

**Άσκηση 2.5** Θεωρούμε τις σχέσεις  $\rho$  και  $\sigma$  στο  $X$ , δηλαδή  $\rho, \sigma \subseteq X \times X$ . Εάν οι  $\rho$  και  $\sigma$  είναι συμμετρικές, εξετάστε εάν η  $\rho \cup \sigma$ , η  $\rho \cap \sigma$  και η  $\rho \setminus \sigma$  είναι επίσης συμμετρικές.

**Άσκηση 2.6** Θεωρούμε το σύνολο  $A = \{1, 2, 3\}$  και τις σχέσεις που ορίζονται στα παρακάτω σχήματα.

$$\alpha'. \text{ Ποιο υποσύνολο του } A \times A \text{ αποτελεί τη σχέση } x > y \text{ στο } A;$$

β'. Πώς συμβολίζουμε συνήθως τη σχέση που ορίζεται από το υποσύνολο  $\tau$  του  $A \times A$ ;



γ'. Για κάθε μια από τις σχέσεις  $\rho$  και  $\sigma$  στο  $A$ , εξετάστε εάν είναι ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.

**Άσκηση 2.7** Στο  $\mathbb{Z}$  θεωρούμε τις σχέσεις  $\equiv_6$  και  $\equiv_4$ . Ποια είναι η σχέση  $\equiv_6 \cap \equiv_4$ ;

**Άσκηση 2.8** Στο σύνολο  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ορίζουμε τη σχέση

$$x \rho y \quad \text{εάν} \quad y \text{ είναι πολλαπλάσιο του } x.$$

Εξετάστε εάν η σχέση  $\rho$  ικανοποιεί τη μεταβατική και την αντισυμμετρική ιδιότητα, και εάν την ικανοποιεί, εξετάστε τι είδους διάταξη είναι.