Άσκηση 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 12 Νοεμβρίου 2013

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] Δείξτε ότι δεδομένου ενός συνόλου αριθμών S, μπορούμε να υπολογίσουμε το δεύτερο μικρότερο στοιχείο του S με $n + \lceil \lg n \rceil - 2$ συγκρίσεις στη χειρότερη περίπτωση.

Υπόδειξη: Βρείτε το ελάχιστο στοιχείο, θεωρώντας ένα δέντρο τουρνουά (tournament tree) για την εύρεσή του.

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Θεωρήστε την αναδρομική σχέση $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + cn$, όπου $0 < \alpha < 1$ και $c > 0$ είναι σταθερές (ανεξάρτητα του n). Δείξτε ότι $T(n) = \Theta(n \lg n)$.

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] Εφαρμόστε το Κεντρικό Θεώρημα (Master Theorem), στις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις.

1. $T(n) = T(\frac{9n}{10}) + n$
2. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^3$
3. $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n^2$
4. $T(n) = 7T(\frac{n}{3}) + n^2$
5. $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο αντικατάστασης για να βρείτε ένα ασυμπτωτικό άνω φράγμα για τις παρακάτω σχέσεις.

1. $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg n$.
2. $T(n) = 3T(\frac{n}{3} + 5) + \frac{n}{2}$.

Προσπαθήστε ώστε το φράγμα σας είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβές. θεωρήστε ότι, και στις δύο περιπτώσεις, η συνάρτηση $T(n)$ είναι σταθερή για $n \leq 10$.

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις:

1. $\lg^2 n = o(2^{\sqrt{2 \lg n}})$
2. $n \cdot 2^n = O(n!)$
3. $2^{2^{n+1}} = \omega(2^{2^n})$
4. $\lg^\star n = \Theta(\lg^\star(\lg n))$, όπου $\lg^\star n = \min\{k \geq 0 \mid \lg^{(k)} n \leq 1\}$.

Σύνολο μονάδων: 100