Πρόοδος

Διάρκεια: $1\frac{3}{4}$ ώρες

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$, ισχύει:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Πρόβλημα 2 [40 μονάδες] Έστω το σύνολο $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, και μία διμελής σχέση R επί του A, η οποία ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα. Οι γραμμές δηλώνουν το πρώτο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R, ενώ οι στήλες δηλώνουν το δεύτερο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R (κατά συνέπεια, $(b, a) \in R$, αλλά $(a, b) \notin R$). Με R_i, $i \geq 1$, συμβολίζουμε την i-οστή μεταβατική επέκταση της R, και με $R^\star$ τη μεταβατική θήκη της R.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	✓			✓	✓					
b	✓	✓	✓							
c			✓	✓	✓					
d				✓						
e					✓					
f				✓	✓	✓				
g		✓					✓			
h		✓						✓	✓	
i			✓			✓			✓	
j									✓	✓

(α′) [7 μονάδες] Κατασκευάστε τον πίνακα της R_1.

(β′) [5 μονάδες] Κατασκευάστε τον πίνακα της R_2.

(γ′) [10 μονάδες] Κατασκευάστε το διάγραμμα Hasse της $R^\star$.

(δ′) [4 μονάδες] Βρείτε τα άνω φράγματα των στοιχείων g και i. Βρείτε τα ελάχιστα άνω φράγματα των g και i.

(ε′) [4 μονάδες] Βρείτε τα κάτω φράγματα των στοιχείων d και f. Βρείτε τα μέγιστα κάτω φράγματα των d και f.

(ϛ′) [10 μονάδες] Βρείτε διαμέριση του A στον ελάχιστο αριθμό αντιαλυσίδων της $R^\star$. Δείξτε ότι η διαμέριση που βρείκατε (στον ελάχιστο αριθμό αντιαλυσίδων) είναι μοναδική.

Πρόβλημα 3 [40 μονάδες] Έστω δύο μη κατευθυνόμενα γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ χωρίς βρόχους, με τουλάχιστον τρεις κορυφές το καθένα (δηλαδή $|V_1| \geq 3$, $|V_2| \geq 3$). Υποθέστε ότι $|V_1 \cap V_2| = 1$, δηλαδή τα δύο γραφήματα έχουν μία κοινή κορυφή. Έστω επίσης $G = (V, E)$ το γράφημα όπου $V = V_1 \cup V_2$ και $E = E_1 \cup E_2$.

(α′) [15 μονάδες] Αν τα G_1 και G_2 έχουν κύκλωμα Hamilton, το G έχει κύκλωμα Hamilton;

(β′) [15 μονάδες] Αν τα G_1 και G_2 έχουν κύκλωμα Hamilton, το G έχει μονοπάτι Hamilton;

(γ′) [10 μονάδες] Δείξτε, με κατάλληλο παράδειγμα, ότι τα G_1 και G_2 είναι δυνατόν να έχουν μονοπάτι Hamilton, αλλά το G μην έχει ούτε μονοπάτι, ούτε κύκλωμα Hamilton.

Σύνολο μονάδων: 100