Τελική Εξέταση

Διάρκεια: $2\frac{1}{2}$ ώρες

Πρόβλημα 1 [40 μονάδες] Σε ένα μανάβικο του Ηρακλείου μπήκαν, στις 20 Ιανουαρίου του 2012, 92 πελάτες. Κάθε πελάτης αγόρασε τουλάχιστον ένα προϊόν. Πιο συγκεκριμένα:

- 46 πελάτες αγόρασαν αγγούρια,
- 53 πελάτες αγόρασαν ντομάτες,
- 53 πελάτες αγόρασαν μήλα,
- 30 πελάτες αγόρασαν πορτοκάλια,
- 18 πελάτες αγόρασαν αγγούρια και ντομάτες,
- 20 πελάτες αγόρασαν αγγούρια και μήλα,
- 14 πελάτες αγόρασαν αγγούρια και πορτοκάλια,
- 27 πελάτες αγόρασαν ντομάτες και μήλα,
- 24 πελάτες αγόρασαν ντομάτες και πορτοκάλια,
- 17 πελάτες αγόρασαν μήλα και πορτοκάλια,
- 5 πελάτες αγόρασαν αγγούρια, ντομάτες και μήλα,
- 9 πελάτες αγόρασαν αγγούρια, ντομάτες και πορτοκάλια,
- 8 πελάτες αγόρασαν αγγούρια, μήλα και πορτοκάλια,
- 13 πελάτες αγόρασαν ντομάτες, μήλα και πορτοκάλια, και
- 5 πελάτες αγόρασαν αγγούρια, ντομάτες, μήλα και πορτοκάλια.

(α΄) [5 μονάδες] Πόσοι πελάτες αγόρασαν αγγούρια ή ντομάτες, αλλά όχι μήλα;

(β΄) [5 μονάδες] Πόσοι πελάτες αγόρασαν αγγούρια ή ντομάτες, αλλά όχι πορτοκάλια;

(γ΄) [10 μονάδες] Πόσοι πελάτες αγόρασαν αγγούρια ή ντομάτες, αλλά όχι μήλα και όχι πορτοκάλια;

(δ΄) [20 μονάδες] Δείξτε ότι όσοι αγόρασαν πορτοκάλια αγόρασαν και κάτι άλλο (αγγούρια ή ντομάτες ή μήλα).

Πρόβλημα 2 [40 μονάδες] Θεωρήστε τη γραμμική αναδρομική σχέση

$$a_n - 5a_{n-1} = f_1(n) + f_2(n) + f_3(n), \qquad n \geq 1, \tag{1}$$

με συναριακή συνθήκη $a_0 = 3$, όπου

$$f_1(n) = 2 \cdot 5^n, \qquad f_2(n) = (12n - 6) \cdot (-5)^n, \qquad f_3(n) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \text{ και } n \neq 100 \\ 4, & n = 100 \end{cases}$$

(α΄) [5 μονάδες] Βρείτε την ομογενή λύση της αναδρομικής σχέσης (1).

(β΄) [10 μονάδες] Βρείτε την ειδική λύση της αναδρομικής σχέσης (1) που αντιστοιχεί στην $f_1(n)$.

(γ΄) [10 μονάδες] Βρείτε την ειδική λύση της αναδρομικής σχέσης (1) που αντιστοιχεί στην $f_2(n)$.

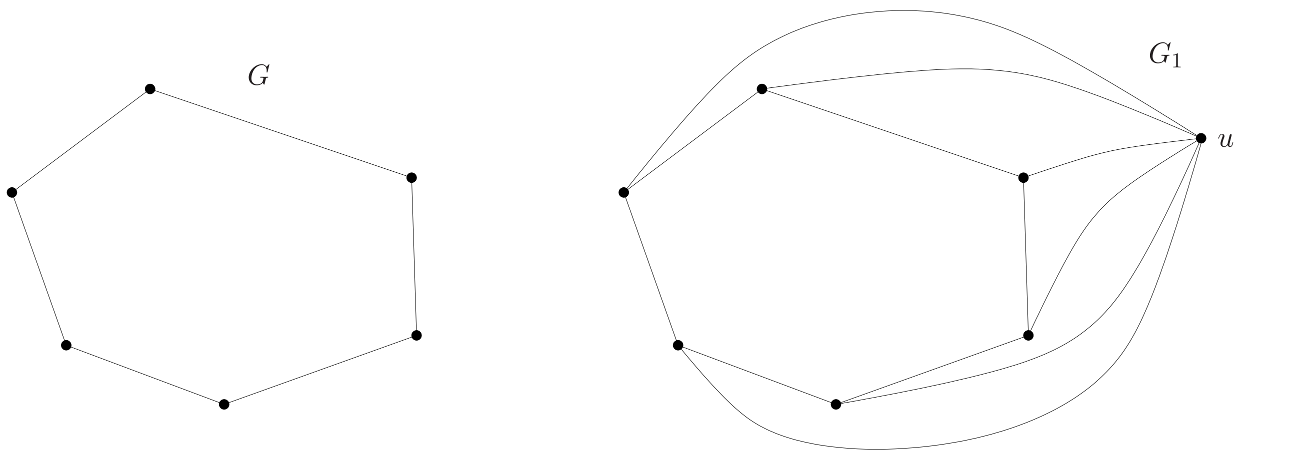
(δ΄) [10 μονάδες] Βρείτε την ειδική λύση της αναδρομικής σχέσης (1) που αντιστοιχεί στην $f_3(n)$, με $a_0 = 0$.

(ε΄) [5 μονάδες] Βρείτε την ολική λύση της αναδρομικής σχέσης (1), χρησιμοποιώντας την ομογενή και τις ειδικές λύσεις που βρήκατε παραπάνω.

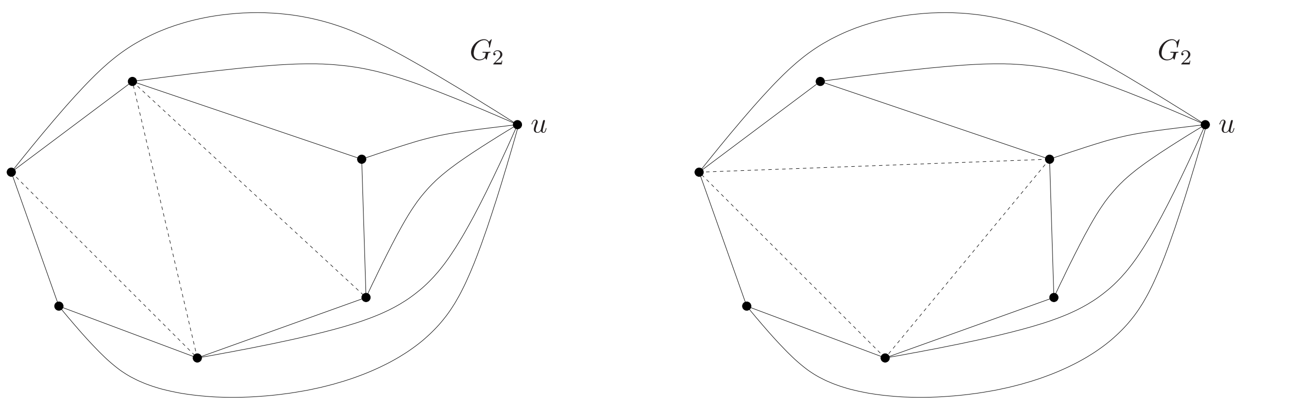
Πρόβλημα 3 [30 μονάδες] Θεωρήστε κυρτό πολύγωνο P με n κορυφές. Θεωρούμε τις κορυφές V και τις ακμές E του πολυγώνου ως ένα επίπεδο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, και κατασκευάζουμε ένα νέο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G_1 = (V_1, E_1)$, όπου $V_1 = V \cup \{u\}$ και $E_1 = E \cup \{\{u, v\} \mid v \in V\}$. Δείξτε ότι, για κάθε $n \geq 4$ άρτιο, μπορούμε να τριγωνοποιήσουμε το πολύγωνο P (χρησιμοποιώντας $n - 3$ διαγωνίους του), έτσι ώστε το γράφημα $G_2 = (V_1, E_2)$ να έχει μονοπάτι Euler. Το γράφημα G_2 έχει το ίδιο σύνολο κορυφών με το G_1, αλλά έχει ως ακμές τις ακμές E_1 του G_1 και τις $n - 3$ διαγωνίους που προσθέσαμε για να τριγωνοποιήσουμε το P.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1 φαίνονται τα γραφήματα G και G_1 για $n = 6$, ενώ στο Σχήμα 2 φαίνεται το γράφημα G_2 που προκύπτει από δύο διαφορετικές τριγωνοποιήσεις του P. Παρατηρήστε ότι το G_2 δεν έχει μονοπάτι Euler για καμμία από τις δύο τριγωνοποιήσεις.

Σύνολο μονάδων: 110



Σχήμα 1: Το γράφημα G (αριστερά), που αντιστοιχεί στο πολύγωνο P με 6 κορυφές, και το γράφημα G_1 (δεξιά) που προκύπτει όταν προσθέσουμε την κορυφή u και την ενώσουμε με όλες τις κορυφές του G.



Σχήμα 2: Δύο διαφορετικές τριγωνοποιήσεις του P (οι διαγώνιοι φαίνονται με διακεκομμένες ακμές) και τα γραφήματα G_2 που προκύπτουν.