# ΕΜ201 - Διακριτά Μαθηματικά

**Χειμερινό Εξάμηνο 2009–2010**

# Ημερολόγιο Μαθήματος

# Οκτώβριος

| Πα 16 Οκτ 2009 |
| --- |
| |

**Τε 14 Οκτ 2009**

Διατάξεις, μεταθέσεις συνδυασμοί.

Συζητήθηκαν τα παρακάτω θεωρήματα:

① *Αν έχουμε απεριόριστο αριθμό αντικειμένων τα οποία είναι $n$ διαφορετικών ειδών, και διαλέξω $r$ από αυτά, τότε ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών δυνατών αποτελεσμάτων ως προς τις επιλογές μου θα είναι $n^r$.*

② *Αν έχουμε $r$ διαφορετικά αντικείμενα και $n$ επιλογές για αυτά, έτσι ώστε σε κάθε επιλογή να αντιστοιχεί ένα αντικείμενο, τότε ο συνολικός αριθμός διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν τα αντικείμενα είναι:*

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r).$$

③ *Αν έχουμε $r = q_1 + q_2 + \ldots + q_t$ αντικείμενα τέτοια ώστε να έχουμε $q_1$ αντικείμενα από ένα είδος, $q_2$ αντικείμενα από ένα άλλο είδος, κ.ο.κ., και $n$ επιλογές, έτσι ώστε σε κάθε επιλογή να αντιστοιχεί ένα αντικείμενο, τότε ο συνολικός αριθμός διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν τα αντικείμενα είναι:*

$$\frac{P(n,r)}{q_1!\,q_2!\,\ldots\,q_t!} = \frac{n!}{(n-r)!\,q_1!\,q_2!\,\ldots\,q_t!}.$$

④ *Ειδικά αν μιλάμε για τις δυνατές διατάξεις $n = q_1 + q_2 + \ldots + q_t$ αντικειμένων, όπου $q_i$ αντικείμενα είναι του ιδίου είδους (και διαφορετικά από τα υπόλοιπα), τότε έχουμε συνολικά*

$$\frac{n!}{q_1!\,q_2!\,\ldots\,q_t!}$$

*διαφορετικές διατάξεις.*

⑤ *Έστω ότι έχουμε $r$ αντικείμενα του ιδίου είδους και $n$ επιλογές. Τότε οι διαφορετικοί τρόποι διατάξεως των $r$ αντικειμένων είναι:*

$$\frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = C(n,r).$$

⑥ *Έστω ότι έχω $r$ όμοια αντικείμενα και $n$ επιλογές, και έστω ότι σε κάθε επιλογή μπορώ να αντιστοιχίσω πάνω από ένα αντικείμενα (δηλ. όσα αντικείμενα θέλω). Τότε ο συνολικός αριθμός τοποθέτησης/επιλογής των αντικειμένων είναι*

$$C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}.$$

Επίσης συζητήθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

(α) *Έστω ότι δεν επιτρέπονται επαναλήψεις. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία $\{1,2,3,5,7,8\}$;*

(β) *Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) είναι μικρότεροι του 4000;*

(γ) *Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) είναι άρτιοι;*

(δ) *Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) είναι περιττοί;*

(ε) *Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσια του 5;*

(ϛ) *Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) περιέχουν το ψηφίο 3 και το ψηφίο 5;*

**Τρ 13 Οκτ 2009**

Στην εν λόγω διάλεξη έγιναν ασκήσεις. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάστικαν οι λύσεις για τα παρακάτω προβλήματα:

① *Έστω $R$ ανακλαστική σχέση επί του συνόλου $A$. Δείξτε ότι η $R$ είναι σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν $\forall\, (a, b), (a, c) \in R \Rightarrow (b, c) \in R$.*

② *Έστω $S$, $T$ σύνολα και συνάρτηση $f : S \to T$. Αν $R_1$ είναι σχέση ισοδυναμίας από του $T$ και $R_2$ διμελής σχέση απί του $S$, τέτοια ώστε $(x, y) \in R_2 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in R_1$, δείξτε ότι η $R_2$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

③ *Έστω σύνολο $A$ με 10 διαφορετικά στοιχεία.*

*(α) Πόσες διαφορετικές διμελείς σχέσεις επί του $A$ υπάρχουν;*
*(β) Πόσες από τις διμελείς σχέσεις του ερωτήματος (α) είναι ανακλαστικές;*
*(γ) Πόσες από τις διμελείς σχέσεις του ερωτήματος (α) είναι συμμετρικές;*
*(δ) Πόσες από τις διμελείς σχέσεις του ερωτήματος (α) είναι ανακλαστικές και συμμετρικές;*
*(ε) Πόσες διαφορερικές σχέσεις ολικής διάταξης επί του $A$ υπάρχουν;*

**Πα 9 Οκτ 2009**

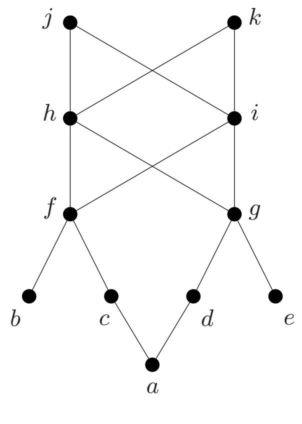
Σχέσεις Ολικής Διάταξης. Ολικώς διαταγμένα σύνολα. Αντιαλυσίδες.

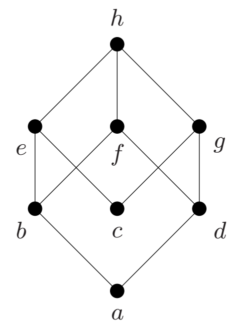
Θεώρημα: Αν $(P, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο με μήκος μακρύτερων αλυσίδων $n$, τότε το $P$ μπορεί να διαμεριστεί σε $n$ αντιαλυσίδες.

Απόδειξη Πορίσματος: Αν $(P, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο με $mn + 1$ στοιχεία, τότε στο $P$ υπάρχει είτε μία αντιαλυσίδα με $m + 1$ στοιχεία είτε μία αλυσίδα με μήκους $n + 1$.

Άνω φράγμα δύο στοιχείων σε Σ.Μ.Δ. Κάτω φράγμα δύο στοιχείων σε Σ.Μ.Δ. Ελάχιστο άνω φράγμα. Μέγιστο κάτω φράγμα.

Παραδείγματα Σ.Μ.Δ. και εύρεση άνω φραγμάτων, κάτω φραγμάτων, ελαχίστων άνω φραγμάτων και μεγίστων κάτω φραγμάτων:



## Τε 7 Οκτ 2009

Σχέσεις ισοδυναμίας. Διαμέριση συνόλου και σύμπλοκα. Κλάσεις ισοδυναμίας.
Παραδείγματα σχέσεων ισοδυναμίας:

- $R = \{(n, m) \,|\, n, m \in \mathbb{N},\ n - m = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Οι δύο κλάσεις ισοδυναμίας της $R$ είναι τα σύνολα των ζυγών και των μονών φυσικών αριθμών.
- Η σχέση $R$ που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | ✓ | ✓ | | | | |
| $b$ | ✓ | ✓ | | | | |
| $c$ | | | ✓ | | | |
| $d$ | | | | ✓ | ✓ | ✓ |
| $e$ | | | | ✓ | ✓ | ✓ |
| $f$ | | | | ✓ | ✓ | ✓ |

  Οι κλάσεις ισοδυναμίας της $R$ είναι τα σύνολα: $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\}$.

- Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\textit{οι βουλευτές του Ελληνικού Κοινοβουλίου}\}$, και τη σχέση $R = \{(X, Y) \,|\, X, Y \in A$ *και οι* $X$ *και* $Y$ *ανήκουν στο ίδιο κόμμα*$\}$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της $R$ είναι το σύνολο των κομμάτων του Ελληνικού Κοινοβουλίου: {'ΠΑΣΟΚ', 'ΝΔ', 'ΚΚΕ', 'ΛΑΟΣ', 'ΣΥΡΙΖΑ'}.

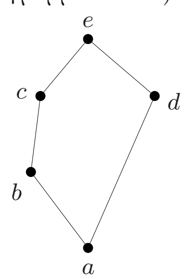
Σχέσεις μερικής διάταξης. Διαγράμματα Hasse. Μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Ο συμβολισμός "$\leq$":

$$a \leq b \quad \text{αν και μόνο αν} \quad (a, b) \in R.$$

Ορισμός *αλυσίδας*. Μήκος αλυσίδας.

Παράδειγμα σχέσης μερικής διάταξης (δεξιά πίνακας, αριστερά διάγραμμα Hasse):

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| $b$ | | ✓ | ✓ | | ✓ |
| $c$ | | | ✓ | | ✓ |
| $d$ | | | | ✓ | ✓ |
| $e$ | | | | | ✓ |




## Τρ 6 Οκτ 2009

***Η διάλεξη δεν έγινε λόγω βουλευτικών εκλογών***

## Πα 20 Σεπ 2009

***Η διάλεξη δεν έγινε λόγω βουλευτικών εκλογών***

# Σεπτέμβριος

**Τε 20 Σεπ 2009**

Σχέσεις. Διμελείς, τριμελείς, τετραμελείς, κ.ο.κ. σχέσεις. Διμελείς σχέσεις επί συνόλου $A$. Ιδιότητες σχέσεων επί συνόλου: ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.

Παραδείγματα διμελών σχέσεων επί συνόλου:

- Σχέση που δεν είναι ούτε ανακλαστική, ούτε συμμετρική, ούτε αντισυμμετρική, ούτε μεταβατική:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | ✓ | | |
| $b$ | | | ✓ | |
| $c$ | | ✓ | | ✓ |
| $d$ | | | | |

- Σχέση που είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | ✓ | ✓ | | | | |
| $b$ | ✓ | ✓ | | | | |
| $c$ | | | ✓ | | | |
| $d$ | | | | ✓ | ✓ | ✓ |
| $e$ | | | | ✓ | ✓ | ✓ |
| $f$ | | | | ✓ | ✓ | ✓ |

- Σχέση που είναι ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | ✓ | | | |
| $b$ | | ✓ | | |
| $c$ | | | ✓ | |
| $d$ | | | | ✓ |

- Σχέση που είναι μόνο ανακλαστική:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | ✓ | ✓ | | |
| $b$ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| $c$ | | | ✓ | |
| $d$ | | | | ✓ |

- Σχέση που είναι μόνο συμμετρική:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | | ✓ | ✓ |
| $b$ | ✓ | | ✓ |
| $c$ | ✓ | ✓ | |

## Τε 30 Σεπ 2009 - Συνέχεια

- Σχέση που είναι μόνο αντισυμμετρική:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | | $\checkmark$ | |
| $b$ | | | $\checkmark$ |
| $c$ | | | |

- Σχέση που είναι μόνο μεταβατική:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $\checkmark$ | | $\checkmark$ |
| $b$ | $\checkmark$ | | $\checkmark$ |
| $c$ | $\checkmark$ | | $\checkmark$ |

Η έννοια της *μεταβατικής επέκτασης* και *μεταβατικής θήκης*. Στο παρακάτω παράδειγμα αριστερά είναι μία σχέση $R$, στο μέσο η (πρώτη) μεταβατική επέκτασή της $R_1$, και δεξιά η δεύτερη μεταβατική της επέκταση $R_2$ που είναι και η μεταβατική της θήκη $R^\star$. Τα στοιχεία της $R_1 \setminus R$ φαίνονται με κόκκινο και της $R_2 \setminus R_1$ με πράσινο.

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | $\checkmark$ | | |
| $b$ | | | $\checkmark$ | |
| $c$ | | $\checkmark$ | | $\checkmark$ |
| $d$ | | | | |

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | $\checkmark$ | $\checkmark$ | |
| $b$ | | $\checkmark$ | $\checkmark$ | $\checkmark$ |
| $c$ | | $\checkmark$ | $\checkmark$ | $\checkmark$ |
| $d$ | | | | |

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | $\checkmark$ | $\checkmark$ | $\checkmark$ |
| $b$ | | $\checkmark$ | $\checkmark$ | $\checkmark$ |
| $c$ | | $\checkmark$ | $\checkmark$ | $\checkmark$ |
| $d$ | | | | |

## Τρ 29 Σεπ 2009

Προτάσεις, ταυτολογίες, αντιφάσεις. Τιμή αληθείας μιας πρότασης, αληθείς και ψευδείς προτάσεις. Διάζευξη, σύζευξη, άρνηση, συνεπαγωγή, ισοδυναμία. Ισοδύναμες προτάσεις. Πίνακες αληθείας. Παράδειγμα χρήσης πινάκων αληθείας για λύση του παρακάτω προβλήματος:

- Αποδείξτε ότι οι προτάσεις $((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \to s$ και $(\bar{p} \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})) \vee s$ είναι ισοδύναμες.

Χρήση του προτασιακού λογισμού για θεμελίωση των παρακάτω μεθόδων απόδειξης δείχνοντας ότι κάποιες προτάσεις είναι ταυτολογίες:

1. *Απόδειξη ισοδυναμίας δύο προτάσεων μέσω απόξειδης της ισχύος των δύο επιμέρους συνεπαγωγών.* Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $p \leftrightarrow q$ αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Με άλλα λόγια, η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:

$$(p \leftrightarrow q) \quad \leftrightarrow \quad ((p \to q) \wedge (q \to p))$$

2. *Επαγωγή εις άτοπο.* Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $p \to q$ αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι $\overline{p \wedge \bar{q}}$. Με άλλα λόγια, η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:

$$(p \to q) \quad \leftrightarrow \quad (\overline{p \wedge \bar{q}})$$

3. *Αντιθετοαντιστοφή.* Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $p \to q$ αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι $\bar{q} \to \bar{p}$. Με άλλα λόγια, η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:

$$(p \to q) \quad \leftrightarrow \quad (\bar{q} \to \bar{p})$$

**Πα 25 Σεπ 2009**

Ισχυρή μορφή της επαγωγής. Απόδειξη των παρακάτω λημμάτων χρησιμποιώντας την ισχυρή επαγωγή:

1. Κάθε θετικός ακέραιος $n \geq 2$ γράφεται είτε είναι πρώτος είτε γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.
2. Σε κάθε οικογενειακό δέντρο με τουλάχιστον έναν κόμβο, ο αριθμός των φύλλων είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον αριθμό των εσωτερικών κόμβων.

Το διαγώνιο επιχείρημα. Απλό παράδειγμα με πεπερασμένο σύνολο. Απόδειξη του γεγονότος ότι το διάστημα $[0, 1]$ των πραγματικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμο χρησιμοποιώντας το διαγώνιο επιχείρημα.

**Τε 23 Σεπ 2009**

Ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος 2 της προηγούμενης διάλεξης. Επαγωγή και ειδικότερα ασθενής επαγωγή. Παραδείγματα χρήσης της ασθενούς επαγωγής για την απόδειξη των παρακάτω τύπων:

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \geq 1$
- $2^n > n^3, \quad n \geq 10$
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}, \quad n > 1$

Αποδείξεις Θεωρημάτων:

1. Αν $A$, $B$ σύνολα, $A$ αριθμήσιμο και $f$ συνάρτηση '1-1' και 'επί', από το $B$ στο $A$ με $f(B) = A$, τότε και $A$ αριθμήσιμο.

**Τρ 22 Σεπ 2009**

Διαδικαστικά μαθήματος. Περιεχόμενο μαθήματος. Σύνολα: πεπερασμένα, απείρως αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα. Η έννοια του υποσυνόλου. Τεχνικές απόδειξης ότι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο. Παραδείγματα & αποδείξεις συνόλων που είναι αριθμήσιμα: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.
Αποδείξεις Θεωρημάτων:

1. Αν $A$ αριθμήσιμο και $B \subseteq A$, τότε και $B$ αριθμήσιμο.
2. Αν $A$ και $B$ αριθμήσιμα σύνολα, τότε και το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ αριθμήσιμο.