Άσκηση 3

Ημερομηνία Παράδοσης: 11 Δεκεμβρίου 2012

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] Έστω $V_1 = \{(2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ και $V_2 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Βρείτε τον $V_1 \cap V_2$. Είναι η ένωση $V_1 \cup V_2$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$; Να δειχθεί ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$. Είναι το άθροισμα ευθύ;

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Έστω $V_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$, $V_2 = \{(x, y, z) \mid x = y\}$. Βρείτε τις διαστάσεις των $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ και $V_1 + V_2$. Για κάθε ένα από τους παραπάνω τέσσερεις διανυσματικούς χώρους βρείτε μία βάση του.

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] Να βρεθούν ο χώρος $U \cap V$ και κατόπιν μία βάση του $U + V$, όπου

$$
\begin{aligned}
U &= [(4, -3, 2, 0), (7, 0, 5, 3)],\\
V &= [(2, -5, 3, 1), (5, -2, 6, 4), (7, -7, 9, 5)].
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Έστω V διανυσματικός χώρος διαστάσεως 10 και V_1, V_2 δύο υπόχωροι του V με $\dim V_1 = 8$ και $\dim V_2 = 9$. Δείξτε ότι η διάσταση του $V_1 \cap V_2$ μπορεί να πάρει δύο μόνο διαφορετικές τιμές.

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Στο χώρο $F(\mathbb{R})$ όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θεωρούμε τα υποσύνολα

$$
\begin{aligned}
A &= \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x), x \in \mathbb{R}\}, \text{ και}\\
\Pi &= \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x), x \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Δείξτε ότι τα σύνολα A, Π είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $F(\mathbb{R})$ και ότι ισχύει $F(\mathbb{R}) = A \oplus \Pi$.

Σύνολο μονάδων: 100