

Άσκηση 2

Ημερομηνία Παράδοσης: 28 Νοεμβρίου 2012

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] Θεωρήστε τις παρακάτω δύο εξισώσεις καμπυλών:

$$\begin{aligned} (κ_1) \quad & 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 16x + 24y + 16 = 0 \\ (κ_2) \quad & 6x^2 + 4y^2 - 12x - 16y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Δείξτε ότι η καμπύλη $(κ_1)$ είναι ευθεία, ενώ η καμπύλη $(κ_2)$ είναι έλλειψη. Βρείτε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών.

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Βρείτε τις εξισώσεις των ελλείψεων των οποίων οι άξονες είναι παράλληλοι με τους άξονες x' και y' , και ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

- εφάπτονται στην ευθεία $y = 3$,
- περνάνε από το σημείο $(8, 2)$, και
- έχουν λόγο αξόνων (μεγάλο προς μικρό) $\frac{5}{4}$.

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] Θεωρήστε τις παρακάτω εξισώσεις κύκλων:

$$\begin{aligned} (κ_1) \quad & (x - 4)^2 + y^2 = 9 \\ (κ_2) \quad & (x - 20)^2 + y^2 = 100 \end{aligned}$$

Βρείτε τις εξισώσεις των τεσσάρων κοινών εφαπτόμενων ευθειών.

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Θεωρήστε την εξίσωση δευτέρου βαθμού:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \zeta = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0.$$

Ποιά συνθήκη ή ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta$, ώστε η παραπάνω εξίσωση να αντιστοιχεί σε:

- έλλειψη;
- παραβολή;
- υπερβολή;
- ευθεία;
- σημείο;

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Βρείτε τα σημεία που βρίσκονται σε ίση απόσταση από τους παρακάτω δύο κύκλους και ευθεία:

$$\begin{aligned} (κ_1) \quad & (x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 1 \\ (κ_2) \quad & x^2 + (y - 5)^2 = 4 \\ (\epsilon) \quad & y = 2 \end{aligned}$$

Σύνολο μονάδων: 100